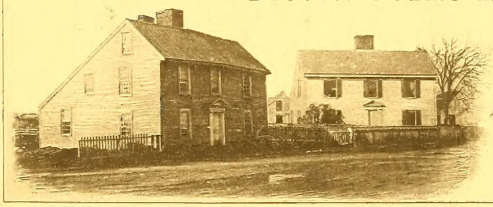
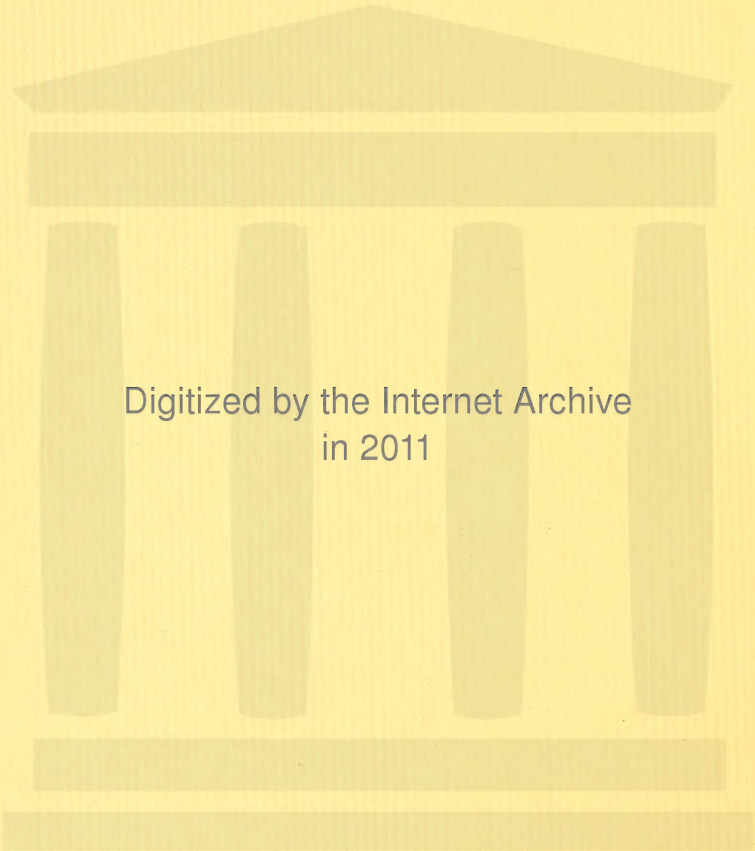
John Adams Library,

IN THE CUSTODY OF THE
BOSTON PUBLIC LIBRARY.



SHELF No
ADAMS
261.9



Digitized by the Internet Archive
in 2011

http://www.archive.org/details/theodosiisphaeri00theo

THEODOSII SPHÆRICA:

Methodo Nova Illustrata, & Succinctè Demonstrata.

Per ISAACUM BARROW,

Ex-professorem Lucasianum *Cantab.* & Soc. Regiæ Soc.

LONDINI,

Excudebat *Guil. Godbid,* vœneunt apud *Robertum Scott,* in vico **Little-Britain.** 1675.

De THEODOSIO, *ex* VOSSIO *de Scientiis Mathematicis.*

In temporibus Ciceronis ac Pompeii claruit Theodosius Tripolites qui partem Geometriæ de figura Sphærica libris tribus utilissimis egregiè excoluit.

EOs *Græcè edidit Latinèque vertit ac* Lutetiæ Wechelii *typis mandavit* Joannes Pena *Mathematicus Regius. Compluria ex eo* Ptolomæus *hausit &* Ptolemæo *recentiores*, Pappus, Proclus, Theon, *multa item; sed, dissimulato* Theodosii *nomine; exscripsit* Vitellio, *ob quæ tamen maximè fuit admirationi.* Arabes *etiam in Linguam suam transtulerunt. Ex Arabico verò Latinè versus fuit à* Platone Tiburtino, *ut auctor est, qui de Speculis ustoriis scripsit. Eaque interpretatio* Venetiis *excusa, ante annos jam* 155 *eo nempe à quo & Almansoris Judicia ex Arabico Latine versa sunt. Sed immane quantum interest inter genuinum* Theodosium *& Arabicè loquentem, usque adeò ut ob tam multa addita alius videri possit, quæ res compulit* Joannem Penam *regium apud Parisienses Mathematicum, ut, non contentus Græcè edere, quod per se magnam laudem merebatur, ex Græco etiam optima fide faceret Latinum Parisiis editus* 1558, *& post eum* Christophorus Clavius, Herigonius, *& nuperrime* Guarini *in* Euclide *adaucto, &* Claudius Millet *de Chales in cursu Mathematico hoc opus illustrarunt. Quanquam autem*

autem Theodoſius *hic* Tripolites *inſcribatur, eóque nomine à* Suida *etiam memoretur: non dubium tamen quin idem ſit ac* Bithynus *ille* Theodoſius, *profeſſione philoſophus; quem Mathematicis diſciplinis uti & filios ejus, præſtitiſſe, ait* Strabo, *lib.* 12. *Ut* Pompeii *magni temporibus vixiſſe videatur. Nec obſtat quod dicatur* Bithynus. *Nam fortaſſe ex* Bithynia, Tripolin *in* Africam *abiit, atque ibi ſedem fixit. Quomodo* Hipparchus *eidem* Straboni *eſt* Bithynus; *qui* Ptolemæo, *& aliis, eſt* Rhodius. *Scripſit etiam* περὶ οἰκήσεων, de habitationibus, *cujus Argumenti* 12 *Propoſitiones dedit* Merſennius *in Synopſi Mathematica, pag.* 246, *& tribus ſequentibus; & libros* 2, περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν, de diebus ac noctibus. *Quæ Græcè in Bibliotheca Regia* Lutetiæ, *adſerſantur, Latinè* Argentorati *edi curavit* Petrus Daſypodius, *anno* 1572.

THE-

THEODOSII SPHÆRICORUM LIBER PRIMUS.

DEFINITIONES.

I.

SPHÆRA est figura solida comprehensa una superficie, ad quam ab uno eorum punctorum, quæ intra figuram sunt, omnes rectæ lineæ ductæ sunt inter se æquales.

Aliter in Elemento 11° definitur, à Semicirculi circumductu.

II.

Centrum autem Sphæræ est ejusmodi punctum.

III.

Axis verò Sphæræ est recta quædam linea per centrum ducta, & utrinque terminata in Sphæræ superficie, circa quam quiescentem circumvolvitur Sphæra.

IV.

Poli Sphæræ sunt extrema puncta ipsius axis.

V.

Polus Circuli in Sphæra, est punctum in superficie Sphæræ, à quo omnes rectæ lineæ ad circuli circumferentiam tendentes sunt inter se æquales.

Ut si omnes rectæ P Z à puncto P ad circumferentiam circuli B Z A ductæ sint æquales, erit P polus circuli B Z A: & inversè si P sit polus, erunt omnes P Z æquales inter se. Fig. 1.

VI.

In Sphæra æqualiter distare à centro sphæræ circuli dicuntur, cùm perpendiculares quæ à centro sphæræ in ipsorum plano ducuntur, sunt æquales. Longiùs autem abesse ille dicitur, in cujus planum major perpendicularis cadit.

Prop. I. Theor.

Fig. 2. Si ſphærica ſuperficies (B A C) ſecetur aliquo plano (B C); linea (B G C F E), quæ ſit in ſphæræ ſuperficie, eſt circumferentia circuli.

a 1. *def. hujus.* b *hyp.* c 15. *def.* 1. Fig. 3. d 12. 11. e 3. *def.* 11. f 47. 1. g 1. *def. huj.* h 1 *ax.* 1. & 3. *ax.* 1. k 15 *def.* 1.

Nam primò tranſeat planum per ſphæræ centrum D: [a] liquet igitur rectas quaſcunque (D E, D F &c.) à D ad lineam B G C F E, [b] hoc eſt è centro ſphæræ ad ejus ſuperficiem, eductas inter ſe æquari; [c] & proinde lineam B G C F E eſſe circuli circumferentiam.

Sin planum non tranſeat per centrum ſphæræ, ab eo (D) [d] ducatur D H plano B C perpendicularis; & ab H ad lineam B G C F E ducantur utcunque rectæ H E, H F, & connectantur D E, D F. Eritque (ob [e] ang. D H E, D H F rectos) D H q + H E q [f] = (D E q [g] = D F q =) D H q + H F q. [h] quare H E = H F. Eodem modo rectæ omnes ab H ad lineam B G C F E eductæ æquantur: [k] ergo linea B G C F E eſt circumferentia circuli. *Q. E. D.*

Coroll. Idem eſt ſphæræ centrum & circuli, qui fit plano per ſphæræ centrum trajecto.

Centrum circuli, qui fit plano non per centrum ſphæræ trajecto, eſt in perpendiculari à centro ſphæræ in planum demiſsâ.

Prop. II. Probl.

Fig. 4. Datæ ſphæræ (B A D C) centrum reperire.

a 1 *hujus.* b 1. 3. c 12. 11. d 11. 11. e 6. 11. f *cor.* 1 *huj.*

Data ſphæra ſecetur utcunque plano [a] facienti circulum B E D, [b] cujus centrum F; ab F [c] erigatur F A recta plano B D E, quæ ſphæræ occurrat punctis A, C; biſecetur A C in G: erit G centrum ſphæræ. Si negas, eſto H centrum ſphæræ, [d] à quo ducatur H I recta plano B D E: [e] eſt que H I ipſi G F parallela; & punctum I eſt centrum circuli B E D, ſed F ponebatur centrum: quæ repugnant.

Coroll. Si in ſphæra ſit circulus non per centrum ſphæræ tranſiens, ſphæræ centrum erit in rectâ è centro circuli ad ipſius planum perpendiculari. [f]

Prop. III. Theor.

Fig. 5. Sphæra (A D B) planum (E F), à quo non ſecatur, non tangit in pluribus punctis uno.

a 1 *hujus.*

Tangat, ſi fieri poteſt, punctis A, B; & à ſphæræ centro C conjungantur C A, C B; planum per C A, C B [a] facit in ſphæra circulum A D B,

A D B, in plano tangenti [b] rectam E A B F: [c] hæc circulum A D B secat, & proinde sphæram: ergo planum secat sphæram, non tangit, contra hypothesin. b 3. 11. c 2. 3.

Cor. Recta, quæ duo puncta in sphæræ superficie signata connectit, intra sphæram cadit.

Prop. IV. Theor.

Si sphæra (A C D E) tangat planum (A H K I L), quod eam non secet, recta linea (B A) ducta à sphæræ centro (B) ad contactum (A), perpendicularis erit ad planum (A H K I L). Fig. 6.

Nam per B A ducantur utcunque duo plana, quæ faciant in sphæra circulos A C D E, A F D G, in plano tangenti rectas H A I, K A L. Et quia sphæræ centrum B [a] est quoque centrum circulorum A C D E, A F D G, & rectæ H I, K L tangunt hos circulos ([b] quippe non secant), [c] erit B A utrique H I, K L perpendicularis; ergo & plano per H I, K L ducto recta erit. *Q. E. D.* a *cor. 1. huj.* b *hyp.* c 18. 3. d 4. 11.

Prop. V. Theor.

Si sphæra (A B C D) tangat planum (E F), quod ipsam non secet, à contactu autem (C) excitetur recta linea (C A) ad angulos rectos ipsi plano (E F), in lineâ excitatâ (C A) erit sphæræ centrum. Fig. 7.

Si negas punctum G extra C A sit centrum, jungatur C G: [a] ergo C G plano E F recta est. [b] ergo C A eidem plano E F recta non est, contra hypothesin. a 4. *hujus.* b 13. 11.

Prop. VI. Theor.

Circulorum (A D, B C, E F), qui in sphæra sunt, maximi sunt, qui per sphæræ centrum (G) ducuntur (A D); aliorum verò (B C, E F) illi inter se æquales sunt, qui æqualiter à centro (G) distant; qui verò longiùs à centro distant, minores sunt: & circuli in sphæra maximi per sphæræ centrum transeunt; aliorum autem æquales à centro æqualiter distant, minores verò longiùs à centro distant. Fig. 8.

Ducantur G H recta circulo B C, & G I recta circulo E F; & connectantur G D, G C, G E.

1. G C recto angulo G H C opposita [a] major est quàm C H; hoc est radius circuli A D major est radio circuli B C: ergo circulus A D major est circulo B C. a 47. 1.

2 & 3. $GHq + HCq$ [a] $= (GCq = GEq)$ [a] $= GIq + IEq$. ergo si $GH = GI$, erit $HC = IE$; & proinde circulus BC æqualis circulo EF: sin $GH \sqsubset GI$, erit $HC \sqsupset IE$, & propterea circulus BC minor circulo EF.

4. Si circulus maximus AD per centrum non transeat, alius transeat, is ergo (ut modò ostensum est) circulo AD major erit, contra hyyothesin.

5. & 6. Ob $GHq + HCq = GIq + IEq$; si $HC = IE$, erit $GH = GI$: sin $HC \sqsupset IE$, erit $GH \sqsubset GI$.

Prop. VII. Theor.

Fig. 9. Si in sphæra (BAC) sit circulus (BFCG), à sphæræ autem centro (D) ad circuli centrum (E) connectatur recta linea (DE), connexa linea (DE) ad planum circuli (BFCG) recta erit.

Ducantur BC, GF diametri circuli BFCG, utcunque & connectantur DB, DC, DF, DG. Quoniam trigona DEB, DEC sibi mutuò æquilatera sunt (quippe $DB = DC$, $EB = EC$, & DE commune est) [a] erunt anguli DEB, DEC pares, & proinde recti. Simili discursu anguli DEF, DEG recti erunt. [b] ergo DE recta est plano BFCG. *Q. E. D.*

a 8. 1.
b 4. 11.

Prop. VIII. Theor.

Fig. 10. Si in sphæra (BADC) sit circulus (BGDH), & à sphæræ centro (E) ad circulum (BGDH) ducatur perpendicularis (EF), quæ ad utramque partem producatur, cadet ea in ipsius circuli polos (A, C).

Ducantur utcunque diametri BD, GH, & connectantur AB, AD, AH, AG. Quoniam radii FB, FD, FG, FH pares sunt, [a] & anguli AFB, AFD, AFG, AFH recti, [b] erunt subtensæ AB, AD, AG, AH æquales. [c] ergo A est polus circuli BGDH. Simili que argumento G ostendetur ejusdem polus. *Q. E. D.*

a 3. *def.* 11.
b 4. 1.
c 5. *def. huj.*

Prop. IX. Theor.

Fig. 10. Si sit in sphæra (BADC) circulus (BGDH) & ab altero (A) polorum ejus in ipsum ducatur perpendicularis recta linea (AFC), cadet hæc in circuli centrum (F), & inde producta cadet in reliquum polum ipsius circuli.

Nam

Nam per F ducantur rectæ B D, G H utcunque, & connectantur A B, A D, A G, A H. Et quoniam rectæ A B, A D, A G, A H [a] pares sunt, & anguli A F B, A F D, A F G, A F H [b] recti, [c] erunt rectæ F B, F D, F G, F H æquales. [d] ergo F est centrum circuli B G D H. [e] Item quia centrum sphæræ est in recta A F C, erit C ejusdem circuli alter polus. *Q. E. D.*

a *5. def. huj.*
b *3. def. 11.*
c *47. 1.*
d *9. 3.*
e *6. hujus.*

Prop. X. Theor.

Si sit in sphæra circulus (B G D H); linea recta (A C) per ejus polos (A, C) ducta, ad circulum (B G D H) recta est, transitque per centrum circuli (F), & sphæræ (E). Fig. 11.

Fiat, ut in præcedenti, & connectantur rectæ C B, C D, C G, C H. Et quoniam trigona C A B, C A D, C A G, C A H sibi mutuò [a] æquilatera sunt, [b] erunt anguli C A B, C A D, C A G, C A H pares. [c] Ergo cum rectæ F B, F D, F G, F H; tum anguli A F B, A F D, A F G, A F H æquantur. [d] quare A F recta est circulo B G D H, [e] & F est centrum ejus, & [f] proinde etiam centrum sphæræ est in A F. Quæ *E. D.*

a *5. def. huj.*
b *8. 1.*
c *4. 1.*
d *4. 11.*
e *9. hujus.*
f *cor. 2. huj.*

Schol. 1. Theor.

Si in sphæra sit circulus (B G D H), & ab altero (A) polorum ejus per sphæræ centrum (E) ducatur recta (A E F C) erit hæc ad circuli planum perpendicularis, & producta cadet in centrum ipsius, & in reliquum polum. Fig. 12.

Fiat, ut priùs, & connectantur E B, E D, E G, E H: & quia trigona A E B, A E D, A E G, A E H sibi mutuò æquilatera sunt, [a] erunt anguli E A B, E A D, E A G, E A H pares; [b] ergo cum rectæ F B, F D, F G, F H, tum anguli A F B, A F D, A F G, A F H æquantur; [c] quare A F recta est circulo B G D H, [d] & F est centrum ejusdem, & C alter polus. *Q. E. D.*

a *8. 1.*
b *4. 1.*
c *4. 11.*
d *9. hujus.*

Schol. 2. Theor.

Si in sphæra sit circulus (B G D H), & à centro sphæræ (E) per centrum circuli (F) ducatur recta linea (A E F C), cadet hæc in utrumque polum circuli (B G D H).

Nam recta E F [a] perpendicularis est plano circuli B G D H. [b] ergo utrinque protracta cadet in polos circuli. *Q. E. D.*

a *hyp. & 7. h.*
b *8. huj.*

Corollarium ex his.

Quatuor puncta; centrum circuli, poli ejusdem, & centrum sphæræ in una recta existunt, in diametro scilicet sphæræ ad circuli planum rectâ.

Prop. XI. Theor.

Fig. 12. In sphæra (A B C D) maximi circuli (A C, B D) se mutuò secant bifariam.

a 6. hujus. b 3. 11. Commune enim centrum circulorum ([a] hoc est sphæræ centrum) esto G; erit hoc in communi sectione [b] recta E F: ergo recta E F est diameter, utrumque circulum bisecans. *Q. E. D.*

Coroll. Intersectio duorum circulorum in sphæra maximorum est diameter sphæræ.

Prop. XII. Theor.

In sphæra (A B C D) circuli (A C, B D), qui se mutuò bisecant, sunt maximi

Communis circulorum sectio E F bisecetur in G; erit G centrum commune circulorum (quoniam E F diameter), quin & sphæræ: nam ex G erigatur G H perpendicularis circulo A C & G B recta circulo B D; [a] eritque centrum sphæræ in utraq; G H, G I; ergo in communi puncto G. ergo cùm circuli A C, B D per centrum sphæræ transeant, [b] erunt maximi circuli. *Q. E. D.*

a cor. 2. huj. b 6. huj.

Prop. XIII. Theor.

Fig. 13. Si in sphæra maximus circulus (A B C D) circulum quempiam (B E D) ad rectos angulos secet, & bifariam secat eum, & per polos (A, C).

Ab F centro sphæræ (seu circuli maximi A B C D) ducatur F G recta circulo B E D, [a] quæ communi circulorum sectioni B D occurret in G. [b] eritque G centrum circuli B E D; ergo B D est diameter circuli B E D, ipsum bisecans; [c] & ipsius poli sunt in F G protracta; ergo in circulo A B C D. *Q. E. D.*

a 38. 11. b cor. 1. huj. c 8. hujus.

Valet hæc Propositio, nec non 8, 9, 10 cum ipsarum Scholiis, etiam quando circulus B D maximus est, & transit per centrum sphæræ.

Coroll. Hinc, si circulus maximus alterum non bisecet, neque per ejus polos transeat, is huic obliquus est.

Prop.

Prop. XIV. Theor.

Si in sphæra maximus circulus (A B C D) circulum non maximum (B E D) bisecat, ad angulos rectos eum secat, & per polos.

Bisecetur sectio B D in G, & à sphæræ centro F connectatur F G. Et quia B D [a] est diameter circuli B E D, erit G ejus centrum. [b] ergo F G recta est circulo B E D, & producta [c] cadet in ejusdem polos; proinde poli ejus sunt in circulo A B C D. Quæ *E. D.*

a *hyp.*
b *7 hujus.*
c *8 hujus.*

Prop. XV. Theor.

Si in sphæra maximus circulus (A B C D) eorum, qui in sphæra sunt, circulorum aliquem (B E D) secet per polos (A, C); secabit eum bifariam, & ad angulos rectos. Fig. 13.

Nam ducta recta A C [a] recta est circulo B E D, & per centra circulorum F, G transit. qnare 1°, circulus A B C D [b] rectus est circulo B E D; & 2°, communis circulorum sectio B D est diameter circuli B E D, ipsúmque bisecat. Quæ *E. D.*

a *10 huj.*
b *18. 11.*

Schol. 1. Theor.

Si in sphæra maximus circulus (A B C D) transeat per polos (A, C) alterius cujuspiam maximi circuli (B D); transibit vicissim hic (B D) per illius (A C) polos (B, D). Fig. 14.

Nam circulus A B C D circulum B D [a] perpendiculariter secat; ergo vicissim circulus B D circulum A B C D secat perpendiculariter, [b] adeóque per polos ipsius. *Q. E. D.*

a *15 hujus.*
b *13 hujus.*

Schol. 2. Theor.

Si in sphæra circulus (A B C D) circulum (B D) per polos (A, C) secet, circulus (A B C D) maximus est, & bifariam eum secat, & ad angulos rectos.

Nam recta A C [a] transit per centrum sphæræ, [b] ergo circulus A B C D est maximus; [c] bisecátque circulum B D, eidémque rectus est. Quæ *E. D.*

a *10 hujus.*
b *6 hujus.*
c *15 hujus.*

Schol.

Schol. 3. Theor.

Vide fig. Prop. præc.

Si in sphæra circulus (A B C D) circulum (B D) bifariam, & ad rectos secet angulos, circulus (A B C D) maximus est, eúmque secat per polos.

Nam bisectâ communi circulorum sectione B D in G, erit G centrum circuli B D: in plano circuli A B C D ducatur G A ad B D perpendicularis; [a] erit G A plano B D recta; [b] ergo G A transit per polos circuli B D. [c] ergo circulus A B C D per ipsius B D polos transit, maximúsque proinde existit. *Quæ E. D.*

a 4. *def.* 11.
b *Sch.* 2. 10 *h.*
c *Sch.* 2. 15 *h.*

Schol. 4. Theor.

Si in sphæra sit circulus (B D), & à polorum ejus altero (A) cadens recta (A G), ipsius plano perpendicularis, æquetur ejus semidiametro, circulus (B D) maximus est.

Nam G [a] est centrum circuli B D, & centrum sphæræ est in rectâ A G, & alter polus C in eâdem protractâ: ergo circulus per A C est maximus. Esto is A B C D secans circulum B D punctis B, D: & connectatur G D. Cùm igitur angulus A G D [b] rectus sit (quoniam A G plano B D ponitur recta) erit A G. G D :: G D. G C. atqui G D = A G. ergo G C = (G D =) A G. ergo cùm centrum sphæræ sit in A G, erit G centrum sphæræ. [c] ergo circulus D B est maximus. *Q. E. D.*

a 9 *hujus.*
b 3 *def.* 11.
c 6 *hujus.*

Prop. XV I. Theor.

Fig. 15.

Si sit in sphæra maximus circulus (A B), recta linea (C B), ducta ab ejusdem circuli polo (C) ad circumferentiam, æqualis est lateri quadrati inscripti maximo circulo.

Nam demissâ C E rectâ circulo A B, [a] erit E centrum circuli A B, ipsiúsque sphæræ; ([b]quare circulus A C B D est maximus), & anguli ad centrum E recti; ideóque singuli arcus C A, C B, A D, B D sunt quadrantes: quare subtensa C B est latus quadrati maximo circulo A C B D inscripti. *Q. E. D.*

a 9 *hujus.*
b 6 *hujus.*

Schol.

Si in sphæra sit circulus (A B), & ab ejus polo (C) ad circumferentiam ducta recta (C B) æquetur lateri quadrati in eo descripti, circulus ipse (A B) maximus est.

Du-

Ducatur C E recta circulo A B; [a]ergo E est centrum circuli A B; & C E [b] perpendicularis est radio E B. ergo C Eq + B Eq [c] = C Bq = 2 B Eq. quare C E = B E. [d] ergo circulus A B est maximus.

a 9 *hujus.*
b 3 *def.* 11.
c 47. 1.
d *sch.* 4. 15. *h.*

Prop. XVII. Theor.

Si in sphæra sit circulus (A B), à cujus polo (C) in ipsius circumferentiam ducta recta linea (C B) æquetur lateri quadrati inscripti maximo circulo (C A B D), ipse circulus (A B) maximus erit.

Circulus enim C A D B, transiens per E centrum sphæræ, & rectam C B, est maximus; cujus arcus C B est quadrans; eique par C A etiam quadrans (ob rectam C A = C B); proinde sectio A B erit diameter circuli C A D B. eadémque A B diameter est circuli A B ([a]hunc enim bisecat;) ergo circulus A B est maximus. *Q. E. D.*

a 15 *hujus.*

Prop. XVIII. Probl.

Lineam rectam describere æqualem diametro (A C) circuli cujuslibet (A B C D) in sphæra dati. Fig. 16. 17.

In peripheria circuli A B C D sume tria quælibet puncta A, B, D, junctisque rectis A B, A D, B D, [a] fac triangulum E F G triangulo A B D æquilaterum; & duc F H ad E F, & G H ad E G perpendiculares, concurrentes in H; & connectatur E H. Erit E H = A C. Ducatur C D: atque ob ang. E F H + ang E G H [b] = 2 rect. [c] erit ang F E G + ang F H G = 2 rect. [d] ergo quadrilaterum E F H G circulo inscribi potest; quare ang E H G [c] = (ang E F G [d] = ang A B D [c] =) ang A C D. item ang H G E [b] = (rect [c] =) ang C D A; & [b] latus E G = A D; [f] ergo E H = A C. *Q. E. F.*

a 22. 1.
b *const.*
c *cor.* 32. 1.
d *cor.* 22. 3.
c 27. 3.
d 8. 1.
e 3. 1.
f 26. 1.

Scholium. Theor.

Fig. 18.

Linea recta (A E) à polo (A) cujusvis circuli (B C), in sphæra, ad sphæræ superficiem ducta, quæ sit æqualis lineæ rectæ (A B) ab eodem polo ad superficiem circuli (B C) ductæ, in circuli (B C) circumferentiam cadet.

Not. hoc scholium prop. 19. *subnectendum est.*

Si negas; per A E duca[tur] circulus maximus A B E C, occurrens circulo B C punctis B, C [in] ducta A B [a] = (A D [b] =) A E: [c] proinde arc. A B = arc A [illegible] *ax.* 1.

a 5 *def. huj.*
b *hyp.*
c 28. 3.

Prop.

Prop. XIX. Probl.

Fig. 19. 20. Describere lineam rectam (E H) æqualem diametro (A C) datæ sphæræ.

In superficie datæ sphæræ sume duo puncta A, B pro libitu tuo. Polo A intervallo A B describatur circulus B Z D, cujus diametro B D [a] fac æqualem F G; & super F G fac triangulum F E G triangulo B A D æquilaterum; ipsisque E F, E G duc perpendiculares F H, G H convenientes in H: erit ducta E H æqualis diametro sphæræ.

[a] 18. *hujus.*

Nam per A B, A C describatur maximus circulus secans circulum B Z D in B, D; eritque ut in præcedenti E H = A C.

Prop. XX. Probl.

Fig. 21. Per duo data puncta (A, B) in sphærica superficie describere circulum maximum.

Describatur polo A, intervallo A G, latere quadrati maximo circulo inscripti, circulus C D; & polo B, pari intervallo B G, describatur circulus E F priori occurrens in G. Itaque circulus polo G intervallo G A transibit per B (quia G A = G B), eritque maximus [a] 17. *hujus.* ([a] quia G A æquatur lateri quadrati maximo circulo inscripti). *Q. E. F.*

Si puncta A B opponantur ex diametro sphæræ, liquet circulos quoscunque per illa descriptos fore maximos.

Prop. XXI.

Fig. 22. 23. Cujuslibet circuli (A B) in sphæra dati polum invenire.

1. Sit primò datus circulus A B non maximus; sume in ejus peripheria duo quælibet puncta C, D; biseca verò arcum C A D in A, & arcum C B D in D; unde arc. A C B = arc. A D B; itaque si [a] 34. *hujus.* per puncta A, B ducatur circulus maximus A E B F, [a] erit in hoc polus circuli A C B; quare bisecto arcu A E B in E, erit E polus circuli A C B. *Q. E. F.*

2. Sin datus circulus A B sit maximus, biseca semicirculum A G B in G; polóque A, spatio G A (vel G B) duc circulum A E B F, bisectóque arcu A F B in F, erit F polus circuli A C B D. *Q. E. F.*

Prop.

Schol. 1. *Theor.*

Si in ſuperficie ſphæræ acceptum fuerit aliquod punctum (A), & ab eo puncto ad circumferentiam circuli cujuſpiam (B C) in ſphæra dati, cadant plures quàm duæ rectæ lineæ æquales (A D, A E, A F), acceptum punctum (A) polus eſt ipſius circuli (B C). Fig. 24.

Ex A ducatur A G recta circulo B C, & connectantur G D, G E, G F.

Ob angulos A G D, A G E, A G F rectos; & rectas A D, A E, A F pares, [a]erunt G D, G E, G F etiam pares; quare G eſt centrum circuli B C; atque inde A erit ejuſdem polus. *Q. E. D.*

[a] 47. 1.
[b] 8 *hujus.*

Schol. 2. *Theor.*

In ſphæra circuli (B F, C E), à quorum polis (A, D) rectæ (A F, D E) ad eorum circumferentias ductæ ſunt æquales, inter ſe æquales ſunt: & circulorum æqualium (B F, C E) æquales ſunt rectæ (A F, D E) ab eorum polis (A, D) ad circumferentias ductæ. Fig. 25.

A ſphæræ centro G ducantur G A, G D; [a] hæ tranſeunt per circulorum centra H, I; connectantur H F, I E; & G F, G E.

1. *Hyp.* Ob A F = D E, [a]erit ang A G F = ang D G E; item ang G H F = rect. = ang G I E. & G F = G E, ergo G H = G I. [b] ergo circuli B F, C E æquantur. *Q. E. D.*

2. *Hyp.* Quia circuli B F, C E pares ſunt, [b] erit G H = G I. item G F = G E, & H F = I E; [c] ergo ang A G H = ang D G E. [d] quare ſubtenſæ A F, D E pares ſunt. *Q. E. D.*

[a] 10 *hujus.*
[a] 27. 3.
[b] 6 *hujus.*
[b] 6 *hujus.*
[c] 8. 1.
[d] 29. 3.

Prop. XXII. Theor.

Si in ſphæra recta linea (A B) per centrum (A) ducta rectam aliquam lineam (C D) non per centrum ductam biſecet, ad angulos rectos ipſam ſecabit. Quòd ſi ad angulos rectos eam ſecet, etiam biſecabit ipſam. Fig. 26.

Nam circuli per A B, C D deſcripti, [a] maximi ſcilicet, centrum erit A; ergo ſi B C = B D, [b]erit A B ad C D perpendicularis; & ſi A B ſit perpendicularis, [b]erit B C = B D.

[a] 6 *hujus.*
[b] 3. 3.

THEODOSII SPHÆRICORUM LIBER SECUNDUS.

DEFINITIO.

IN sphæra circuli se mutuò tangere dicuntur, cùm communis sectio planorum utrumque circulum tetigerit.

Prop. I. Theor.

Fig. 27. In sphæra paralleli circuli (B F, C E) circa eosdem polos sunt.

Sint A, D poli circuli B F, quos connectat recta A D; [a] hæc recta est circulo B F, [b] ergo & circulo C E; [c] quare per polos circuli C E transit; ergo A, D sunt poli circuli C E. Unde liquet propositum.

a 10. 1 *hujus.*
b *conv.* 14. 11.
c 8. 1 *hujus.*

Prop. II. Theor.

In sphæra circuli (B F, C E) qui sunt circa eosdem polos (A, D), sunt paralleli.

Nam quia polos connectens recta A D utrique circulo B F, C E [a] recta est, [b] erunt paralleli isti circuli. *Q. E. D.*

a 10. 1 *hujus.*
b 14. 11.

Scholium. Theor.

Fig. 28. In sphæra non sunt plures circuli æquales, & paralleli, quàm duo.

Sint æquales duo circuli A B, E F, & paralleli: vis alterum C D hisce parem dari, & parallelum. Sint igitur [a] communes omnium poli G, H, quos connectat recta G H; [b] hæc per I centrum sphæræ transit, & parallelis circulis recta est; ergo ob circulos pares C D, E F, [c] erit I L = I M, contra 9. *ax.* 1.

a 1. 2 *huj.*
b 10. 1 *huj.*
c 6. 1 *huj.*

Prop.

Prop. III. Theor.

Si in sphæra duo circuli (A B, A C) secent in eodem puncto (A) circumferentiam illius maximi circuli (A B C), in quo polos habent, se mutuò tangent illi circuli (A B, A C). Fig. 29.

Nam circulus A B C ad ambos A B, A C [a] rectus est, [b] quare communis horum sectio (puta E D) circulo A B C recta est; ergo E D perpendicularis est rectis A B, A C (quæ communes sunt sectiones circuli A B C cum circulis A B, A C; & quæ diametri sunt circulorum A B, A C). [d] ergo E D tangit circulos A B, A C, ergo hi se mutuò tangunt. *Q.E.D.*

a 15. 1. *huj.* b 19. 11. c 3. *def.* 11. d 16. 3. e *def.* 1. 2 *huj.*

Prop. IV. Theor.

Si in sphæra duo circuli (A B, C B) se mutuò tangant, maximus circulus (D E) per eorum polos (D, E) descriptus, per eorum contactum (B) transibit. Fig. 30.

Si non transit per B, transeat per F; circulus igitur G F polo D, intervallo D F (majori quàm D B) descriptus secabit circulum C B in F. atqui circuli G F, C F se mutuò [a] contingunt (quia circulus maximus D F E transit per utriusque polos). Quæ repugnant.

a 3. 2. *hujus.*

Prop. V. Theor.

Si in sphæra duo circuli (A B, C B) se mutuò tangant, maximus circulus (D B) descriptus per unius (A B) polos (D), & per amborum contactum (B); per reliqui quoque circuli (C B) polos (E) transibit. Fig. 31.

Transeat circulus maximus D E per polos D, E; [a] hic per contactum B transibit: puta alterum maximum D B F transire per D, B. ergo cùm uterque arcus D B [b] sit semicirculus, & D sit polus circuli A B, erit B alter ejusdem polus, situs in suâ ipsius circumferentiâ. *Q.E.A.*

a 4. 2 *hujus.* b 11. 1 *huj.*

Prop. VI. Theor.

Si in sphæra maximus circulus (A B) circulorum in sphærica superficie descriptorum aliquem (A C) tangat, tanget & alterum ei æqualem, & parallelum. Fig. 32.

Sint D & E poli circuli A C, quos nectat recta D E. Per A, D, E ducatur circulus maximus A D B E. Item polo E, per B, ducatur circulus

culus B F. Et quia D E utrique circulo A C, B F [a]recta est, [b]erunt hi paralleli. Item si ex semicirculis A D B, D B E demantur communis arcus D B, manet arcus A D = arc. B E. Unde circulus A C [c] æqualis est circulo B F. Denique quia polus circuli A B est in circulo A D E, in quo itidem polus circuli B F; [d] tanget circulus A B circulum B F. Unde liquet propositum.

[a] 10. 1 *hujus.* [b] 14. 11. [c] *sch.* 22. 1 *b.* [d] 3. *hujus.*

Coroll. Hinc liquet contactus A, B diametraliter opponi.

Prop. VII. Theor.

Fig. 32. Si sint in sphæra duo æquales, & paralleli circuli (A C, B F), maximus circulus (A B), qui eorum alterum (A C) tetigerit, reliquum quoque (B F) tanget.

Nam si circulus A B non tangat ipsum B F, [a]tanget alterum saltem ipsi A C parem, & parallelum; ergo tanget tres circulos pares & parallelos. [b] *Q. E. A.*

[a] 6. 2. *hujus.* [b] *sch.* 2. 2 *huj.*

Scholium. Theor.

Circuli (A C, B F) in sphæra paralleli, quos maximus aliquis circulus (A B) tangit, æquales inter se sunt.

Per [a]communes parallelorum polos D, E, & polos circuli A B describatur maximus circulus A F B, [b] qui per tactus A B transibit. Et ob semicirculos A D B, D B E, [c]erit arcus A D = B E. [d] ergo circuli A C, B F æquantur.

[a] 1 *hujus.* [b] 4 *hujus.* [c] 3. *ax.* 1. [d] 2. *sch.* 21. 1. *hujus.*

Prop. VIII. Theor.

Fig. 33. Si in sphæra maximus circulus (A B) ad aliquem sphæræ circulum (C D) obliquus sit, tanget is duos circulos, æquales quidem inter se, parallelos autem prædicto circulo (C D), ad quem obliquus est.

Cape circuli C D polos E, F; perque hos, & polos circuli A B describatur circulus E A B; item polo E per A, & polo F per B describantur circuli A G, B H; [a] liquet circulum A B tangere circulos A G, B H; [b]hosque pares esse, & [c] parallelos circulo C D. *Q. E. F.*

[a] 3. 2 *hujus.* [b] 6. 2 *hujus.* [c] 2. 2 *hujus.*

Schol. Theor.

Si in sphæra maximus circulus (A B) circulorum aliquem (A G) tangat, obliquus erit ad alios circulos (C D) parallelos ei, quem tangit.

Nam

Nam quia circulus A B [a]non transit per polos circuli A G (tangit enim circulum A G, non bisecat) ; non transibit per polos circuli C D, [b]ergo obliquus est circulo C D. *Q.E.D.*

a 15. 1 *hujus.*
b 13. 1 *huj.*

Prop. IX. Theor.

Si in sphæra duo circuli (A B C D, E D F B) se mutuò secent, maximus circulus (A E C F) per eorum polos ductus, bisecabit segmenta (B A D, B C D, & B E D, B F D) ipsorum circulorum. Fig. 34.

Sint A C, E F sectiones circulorum A D C, E D F cum circulo A E C F, & B D sectio ipsorum A D C, E D F. Et quia circuli ADC, E D F circulo A E C [a]recti sunt ; erit B D ([b]recta circulo A E C F, [c]adeóque) perpendicularis rectæ A C. Ergo cùm A C sit [d] diameter circuli A D C, [e] erit arc A B = arc A D, & arc C B = arc C D. Simili discursu arc E B = arc E D, & arc F B = arc F D. *Q.E.D.*

a 15. 1 *huj.*
b 19. 11.
c 3. *def.* 11.
d 15. 1 *huj.*
e 28. 3.

Schol. 1. *Theor.*

Si in sphæra circuli (A B C D, E B F D) se mutuò secent ; circulus alius (A E C F) eorum segmenta (A B D, C B D ; & E B D, F B D) bisecans, transit per eorum polos, estque maximus.

Nam ob A B + B C [a] = A D + D C ; erunt arcus A B C, ADC semicirculi ; ergo recta A C est diameter circuli A B C D ; ergo cùm arcus A B, A D pares sint, erit recta B G D rectæ A C perpendicularis : & pari discursu recta B G D rectæ E F ostendetur perpendicularis ; quare B G D [b]recta erit circulo A E C F per ipsas AC, E F ducto ; [c]ergo ambo circuli A B C D, E B F D recti sunt circulo A E C F. [d] unde liquet circulum A E C F maximum fore, & per circulorum A B C D, E B F D polos transire. *Q. E. D.*

a 2. *ax.* 1.
b 4. 11.
c 18. 11.
d 3 *sch.* 15. 1. *huj.*

Schol. 2. *Theor.*

Si in sphæra duo circuli (A B C D, E B F D) se mutuò secent, maximus circulus (A F C E) bisecans duo quæcunque illorum segmenta (B A D, B E D), habens tamen arcum (A F C E) inter illa segmenta positum semicirculo inæqualem) transit per polos ipsorum, duóque reliqua segmenta (B C D, B F D) bisecet. Fig. 35.

Dic alium circulum maximum A G E descriptum iri per polos circulorum B C D, B F D ; [a] hic segmenta B A D, B F D bisecabit, & proinde

a 9. 2 *huj.*

proinde transibit per puncta A, E; unde arcus A F C E [b]erit semicirculus, contra hypothesin; ergo A F C E transit per polos circulorum ABCD, EBFD; [a]adeoq; segmenta BCD, BFD bisecat. *Q. E. D.*

b 11. 1 *huj.*

Prop. X. Theor.

Si sint in sphæra paralleli circuli (A B C D, E F G H), per quorum polos (I) describantur maximi circuli (A E I G C, B F I H D); parallelorum quidem circumferentiæ (A B, E F, & B C, F G &c.) inter maximos circulos interceptæ similes sunt; maximorum autem circulorum circumferentiæ (A E, B F, C G, D H) inter parallelos circulos interceptæ, sunt æquales.

Fig. 36.

Sint A C, B D sectiones circuli A B C D cum circulis A I C, B I D; & E G, F H sectiones circuli E F G H cum iisdem A I C, B I D, [a]erunt A C, B D diametri circuli A B C D, & E G, F H diametri circuli E F G H; ergo L & K sunt centra circulorum A B C D, E F G H. Item (ob circulorum A C B, E G H parallelismum) [b]erunt E G, A C, & F H, B D parallelæ; [c] quare ang E K F = ang A L B; ergo similes sunt arcus A B, E F: eâdémque ratione arcus B C, F G similes ostendentur. Quinimò * subtensæ rectæ I A, I B, I C, I D, & [d] ideo arcus I A, I B, I C, I D æquantur; & pari modo arcus I E, I F, I G, I H æquantur; unde etiam reliqui arcus A E, B F, C G, D H pares sunt. *Q. E. D.*

a 15. 1 *hujus.*
b 16. 11.
c 10. 11.
* 5. *def.* 1 *huj.*
d 28. 3.

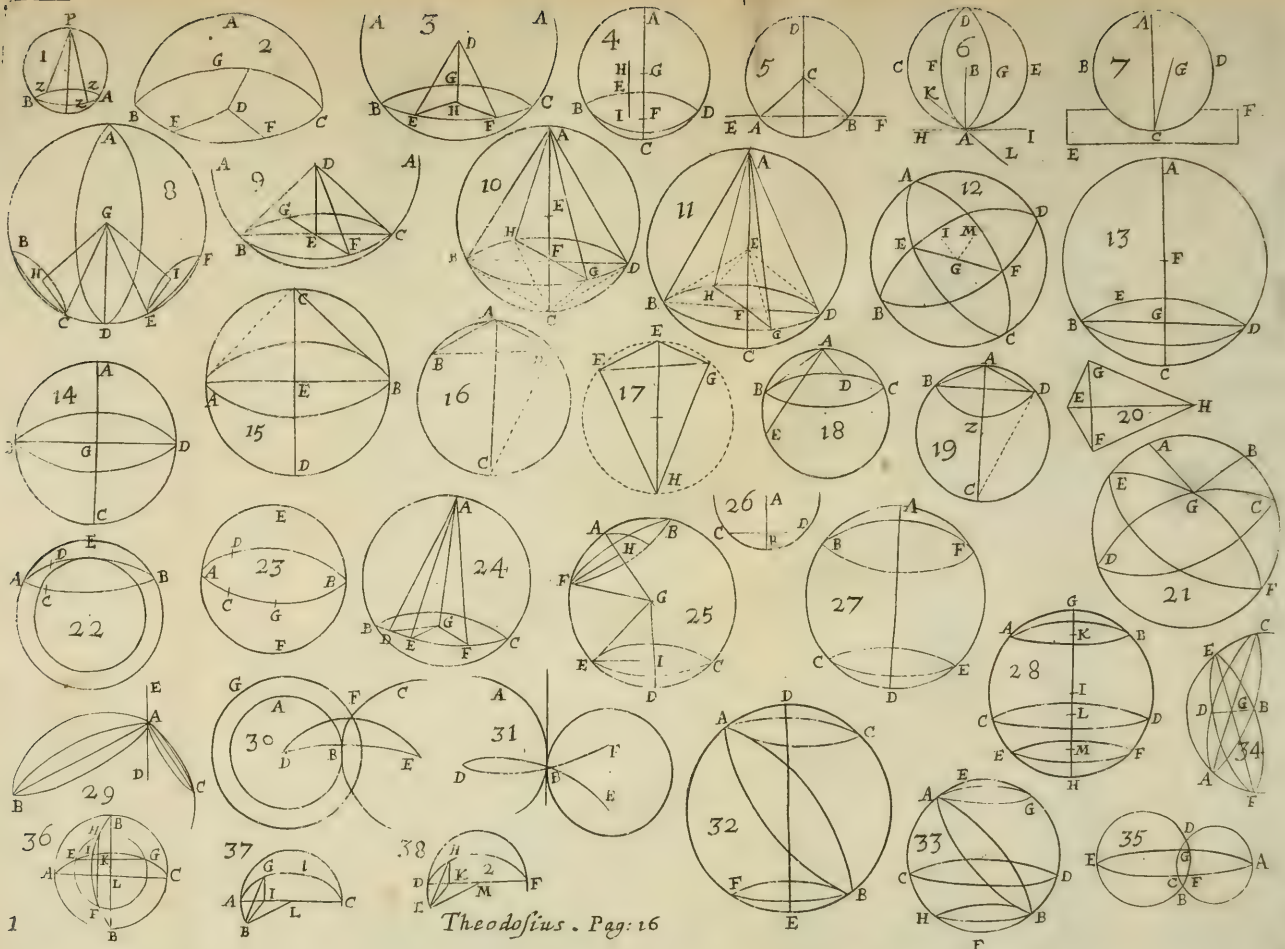
Prop. XI. Theor.

Fig. 37. 38. 39. 40. 41. 42.

Si in diametris (A C, D F) circulorum æqualium (A B C, D E F) æqualia circulorum segmenta (A G C, D H F) ad angulos rectos insistant, à quibus sumantur æquales circumferentiæ (A G, D H), quarum quælibet inchoata ab extremitate sui segmenti sit minor semisse circumferentiæ integri segmenti; à punctis autem (G, H) æquales circumferentias (A G, D H) terminantibus, ducantur æquales rectæ lineæ (G B, H E) ad circumferentias circulorum (A B C, D E F) primò positorum; ipsæ circulorum primò positorum circumferentiæ (A B, D E) interceptæ inter illas rectas lineas (G B, H E) & extremitates diametrorum (A C, D F) erunt æquales.

Ducantur G I recta plano A B C, & H K recta plano D E F ([a]cadent hæ in rectas A C, D F); connectantúrque A G, B I; & D H, E K; & B L, E M (ad centra L M). Et propter arc. G C = arc. H F, [b]erit ang G A C = ang H D F. Item ang G I A * = rect. = ang H K D; & A G [c] = D H. [d] Ergo G I = H K, & A I = D K; unde

a 30. 11.
b 27. 3.
c 29. 3.
* 3. *def.* 11.
d 26. 1.



Theodosius. Pag: 16

de IL = KM). Item GB [c] = HE, & anguli GIB, HKE* sunt recti: [g] ergo IB [f] = KE: itaque trigona BIL, EKM sibi mutuò æquilatera sunt; unde ang ALB = ang DME. [h] ergo arcus AB, DE æquantur. *Q. E. D.*

[c] *hyp.* [f] 47. 1. [g] 8. 1. [h] 26. 3.

Si perpendiculares à G, & H incidant in diametrorum extremitates (ut in 5, & 6 figuris) brevius conficietur negotium sic. Ob GA [k] = HD; & GB [c] = HE, & angulos GAB, HDE rectos. Erit quoque AB [l] = DE. [l] Ergo arc. AB = arc. DE. *Q. E. D.*

[k] *suprà.* [l] 28. 3.

Prop. XII. Theor.

Si in diametris (AC, DF) circulorum æqualium (ABC, DEF) erigantur circulorum æqualium segmenta (AGC, DHF); & ab ipsis segmentis æquales circumferentiæ (AG, DH) ad extremitates segmentorum desumantur, minores dimidiis ipsorum partibus; ab ipsis autem circulis æquales circumferentiæ (AB, DE) sumantur ad easdem partes, quæ sunt ad extremitates diametrorum: rectæ lineæ (GB, HE) ductæ à punctis in circumferentiis segmentorum ad puncta in circumferentiis circulorum, erunt æquales.

Fiat, ut in præcedenti; & quoniam (ut istuc ostensum) IL = KM, & BL = EM, & arc AB = arc DE, [a] erit ang ILB = ang KME. [b] ergo BI = EK: sed & GI = HK; & anguli GIB, HKE recti sunt; [b] ergo BG = EH. *Q. E. D.*

[a] 27. 3. [b] 4. 1.

In 5 & 6 Fig. ob arc AB = DE; & ideo rectam AB = DE, & AG = DH; & angulos GAB, HDE rectos, [b] erit GB = HE. *Q. E. D.*

[b] 4. 1.

Prop. XIII.

Si in sphæra sunt paralleli circuli (AB, CD, FGH), & describantur maximi circuli (AFK, BHK), qui unum quidem (AB) parallelorum tangant, reliquos verò (CD, FGH) secent; circumferentiæ (AB, CD, FG; & AB, LE, MH) parallelorum, interceptæ inter eos maximorum circulorum semicirculos (BNP, AFO; & AMO, BHP), qui non concurrunt similes erunt: maximorum verò circulorum circumferentiæ (AC, AL; BD, BE; & CF, LM; DG, EH; & AF, AM, BG, BH,) inter duos quoscunque parallelos interceptæ, erunt æquales.

Fig. 43.

*Fiant scilicet arc, KO = NA, & arc. KI = NB; unde quum

NPK, & NOK sint semicirculi, erunt BNP, AFO semicirculi; & adeò reliqui AMO, BHP etiam semicirculi).

* 1. 2 *hujus.* Per parallelorum *polos I, & contactus A, B describantur circuli maximi QAIR, SBIT; estque arc CA[a] = arc AL, & arc DB a 5 & 9. 2 *h.* [a] = arc BE; & arc CV[a] = arc VL; & arc DX[a] = arc XE. Porro, quum circulus QAIR circulo AFK, & circulus SBIT circulo BHK b 15. 1 *hujus.* [b] recti sint; & arcus AI, BI minores quadrante (ob circulum ABRT non maximum); & arc AI = BI; erunt juxta 11 hujus arc AC, BE æquales. Ergo arcus AL, AC; BE, BD æquales sunt. Eodémque pacto arcus AM, AF, BH, BG æquantur. Unde & reliqui CF, LM, EH, DH æquantur. *Q.E.D.*

c 29. 3. Item ob arc CAL = arc DBE; [c] erit subtensa CL æqualis
d 28. 3. subtensæ DE, & [d] proinde arcus CVL arcui DXE; & semissis CV = DX: unde addito vel subtracto communi VD, erit arc CD =
e 10. 2 *huj.* arc VX. Ergo, cùm arcus VX [e] similis sit arcui AB, erit arcus CD eidem AB similis. Eadémque ratione arcus FG, neque non & arcus EL, HM eidem AB similes ostendentur. *Q.E.D.*

Prop. XIV. Probl.

Fig. 44. Dato in sphæra circulo (AB), qui minor sit maximo, datóque in ejus circumferentia aliquo puncto (A), per illud punctum describere circulum maximum, qui tangat datum circulum (AB).

a 20. 1 *huj.* Per A, & C (polum circuli AB) [a] describatur circulus maximus
b 17. 1 *huj.* CABE, è quo sumatur quadrans AD. Polo D per A ducatur cir-
c 3. 2 *hujus.* culus AZE; [b] hic maximus est, [c] & tangit datum AB in A. *Q.E.F.*

Prop. XV. Probl.

Fig. 45. Dato in sphæra circulo (AB), qui minor sit maximo; & dato aliquo puncto (G) in sphæræ superficie, quod sit inter datum circulum (AB), & alium ei æqualem & parallelum CD; per punctum illud datum (G) describere circulum maximum, qui tangat datum circulum (AB), maximo minorem.

a 26. 1 *hujus.* & *coroll. schol.* 10. 1. *huj.* Per E, F [a] polos parallelorum, & punctum G [a] describatur circulus maximus EAC, in quo capiatur quadrans BH; & polo E per H describatur circulus HI. Sumatur etiam quadrans GK, polóque G per K describatur circulus KL (qui certè maximus erit) secans circulum HI in L (secabit verò, quia punctum K cadit inter H, & I; ob arcum

arcum G H minorem, & arcum G I majorem quadrante G K: illud, quia B H est quadrans; hoc quia A F D, ipsi E A F æqualis, est semicirculus; & A I ([b]=B H) est quadrans; & proinde D I est quadrans) tum per L & polos E, F ducatur maximus circulus E L F secans circulum A B in M; polóque demum L per M ducatur circulus M N: dico factum. Nam arc. L M [b] æquatur arcui H B quadranti, [c] ergo M N est maximus circulus. Item, quia circ. K L transit per polum L circuli M N, [d] transibit hic vicissim per polum illius, hoc est per G: denique quia circuli A B, G N secant maximum circulum E F, in quo polos habent, in eodem puncto M, [e] ipsi se contingent mutuò. Itaque factum.

b 2 & 10. 2 *hujus.*

c 17. 1 *huj.*

d 1 *sch.* 15. 1 *hujus.*

e 3 *hujus.*

Scholium.

Simili discursu, aliud punctum, quo circulus K L secat circulum H I, polus erit alterius circuli maximi transeuntis per G, tangentísque circulum A B.

Prop. XVI. Theor.

Maximi circuli, qui similes circumferentias parallelorum circulorum auferunt, aut per parallelorum polos transeunt, aut eundem unum parallelum tangunt. Fig. 46. 47. 48.

1°, Auferant circuli maximi A B C, D B E (ex parallelis A D C, F G) similes arcus A D, F G; & alter A B C transeat per polos parallelorum; erit maximorum intersectio B, polus parallelorum. Si negas, sit H polus ipsorum, & per H, G ducatur maximus H G I (secans ipsum A D C in I), unde arcus A I, F G [a] similes sunt. ergo cùm A D, F G similes ponantur, erunt A I, A D similes, adeóque pares. *Q. E. A.*

a 10. 2 *huj.*

2°. Auferant maximi A B C, D E F similes arcus A D, B E; & neuter per polos transeat, sed alter A B C unum B E tangat (in B); etiam D E F eundem B E tanget in E. Vis secare? [b] itaque per E describatur circulus maximus G E H. [c] ergo arcus A G, B E similes sunt; proinde verò arcus A D, A G similes erunt. *Q. E. A.*

b 14. 2 *huj.*

c 13. 2 *huj.*

3°. Auferant (ex parallelis A D C, G H) maximi A B C, D E F similes arcus A D, G H, & neuter per polos transeat, aut unum tangat parallelorum; [d] ergo circulus A B C parallelis obliquus est; [e] ergo tanget aliquem, puta (B E) ipsis A D C, G H parallelum; eundem B E tanget circulus D E F: si negas; per H, [f] describatur circulus maximus K H I tangens ipsum B E in I, [g] ergo arcus A K, G H similes, itidémque arcus A K, A D similes erunt. *Q. E. A.*

d 13. 1. *huj.*

e 8. 2 *hujus.*

f 15. 2 *huj.*

g 13. 2 *huj.*

Prop. XVII. Theor.

Fig. 49. In ſphæra paralleli circuli (A B, E F), inter quos, & parallelorum maximum (C D) æquales circumferentiæ (A C, C E) maximorum circulorum intercipiuntur, ſunt inter ſe æquales; illi verò (A B), inter quos & maximum parallelorum (C D) majores maximorum circulorum circumferentiæ (A C) intercipiuntur, ſunt minores.

Nam primò tranſeat circulus maximus A C E F D B per polos parallelorum; ergo communes ſectiones A B, E F [a] erunt diametri circulorum A B, E F. Jam ſi arc A C ([b] B D) = arc C E ([b] D F); ob arc C G D [c] = arc C H D; erit arc A G B = arc E H F; [d] unde ſubtenſæ A B, E F pares erunt, & proinde circuli A B, E F etiam pares. *Q. E. D.* Quod ſi arc A C (B D) ⊏ arc C E (D F) erit arc A G B ⊐ arc E H F, & ſubtenſa A B ⊐ E F, & circulus A B ⊐ E F. *Q. E. D.*

a 15. 1 *huj.*
b 10. 2 *huj.*
c 11. 1 *huj.*
d 29. 3.

Fig. 50. Non tranſeat ſecundò circulus maximus A C E F D B per parallelorum polos (G, H); verùm per hos, & polos circuli A C E F D B [e] deſcribatur circulus G I H K. [f] Itaque poli circuli G I H K erunt in utroque maximo circulo A C E F D B, & C D. ergo ad interſectiones C, D; [g] proinde arcus C I, C K æquantur.

e 20. 1 *hujus.*
f 1 *ſch.* 15. 1 *h.*
g 5. *def.* 1 *huj.* & 28. 3.

Jam ſi arc C A = arc C E, erit arc A I = arc E K. Item (ob ſemicirculos I K, G H) arc G I = H K; [h] ergo rectæ G A, H E pares ſunt, & [k] conſequenter circuli A B, E F pares erunt. *Q. E. D.*

h 12. 2 *huj.*
k 2 *ſch.* 20. 1 *h.*

Sin arc C A ⊏ arc C E; ſit arc C L = arc C E. Ergo parallelus per L æquabiter (uti mox oſtenſum) parallelo E F. [l] Quare parallelus A B minor erit ipſo E F. *Q. E. D.*

l 6. 1 *hujus.*

Prop. XVIII. Theor.

In ſphæra maximorum circulorum circumferentiæ (A C, E C) interceptæ inter maximum parallelorum (C D), & duos alios circulos (A B, E F) æquales & parallelos, ſunt æquales. Illæ verò (A C) quæ intercipiuntur inter majorem parallelum (A B) & maximum C D, ſunt minores.

Nam in 1ª hyp. ſi dicas eſſe A C ⊏ C E, [a] erit idcirco circ A B ⊐ circ C D: in 2ª hyp. ſi dicas eſſe A C = vel ⊏ C E, [a] erit ergo circ A B = vel ⊏ circ C D, contra hypotheſin.

a 17. 2 *huj.*

Prop.

Prop. XIX. Theor.

Si in sphæra maximus circulus (A B C D) parallelos aliquot circulos (E F, G H, I K) in sphærica superficie descriptos secet quidem, non tamen per polos, in partes inæquales eos secabit, excepto parallelarum maximo (G H): de parallelorum autem segmentis in hemisphæriorum uno (G Q H) interceptis, ea (L F M), quæ sunt inter maximum parallelorum (G H) & polum conspicuum (Q) sunt majora semicirculo, reliqua verò (O P K), quæ sunt inter maximum parallelorum & polum occultum (R), sunt semicirculo minora; æqualium denique ac parallelorum circulorum (E F, I K) alterna segmenta (L F M, O I P; & L E M, O K P) sunt inter se æqualia. Fig. 51.

1. Per polos Q, R & punctum B describatur circulus maximus (Q B R; is [a] transit etiam per D, unde arc B H D = arc B G D: [b] item arc S F T = arc S E T, [b] & arc X K V = arc X I V. ergo arc L F M ⊏ arc L E M, & arc O I P ⊏ arc O K P. a 11. 1 *huj.* b 15. 1 *huj.*

2. Si circulus E F = circ I K, per polos parallelorum Q, R, & polos circuli A B C D, ducatur circulus A G H: [c] istius circuli poli sunt B, D: ergo arcus B A, B C æquantur. [d] Item arc B L = arc B O; ergo arc L A = arc O C. ergo arc L A M [e] (2 L A) = arc O C P (2 O C): unde subtensa L M = O P. Ergo arc L E M = arc O I P. arc C E M = arc O K P. *Q.E.D.* c 1 *sch.* 15. 1 *hujus.* d 18. 2 *huj.* e 9. 2 *huj.*

Prop. XX.

Si in sphæra maximus circulus (G L) parallelos aliquot circulos (A B, C D, E F) secet, non tamen per polos; de parallelorum assumptis circumferentiis in uno hemisphærio, illæ (O B H), quæ propiùs accedunt ad polum conspicuum (P) erunt majores, quàm ut similes esse possint illis (N D I), quæ ab eodem conspicuo polo longiùs absunt. Fig. 52.

Nam si per P, I; & P, N ducantur circuli maximi secantes ipsum A B in R, S; erit arcus H B O major arcu R B S, [a] qui similis est arcui I D N; unde liquet propositum. a 10. 2 *huj.*

Prop. XXI.

Si in sphæris æqualibus maximi circuli (B N D, F O H) ad maximos circulos (A B C D, E F G H) inclinentur; ille (B N D) cujus polus Fig. 53. 54.

polus (P) sublimior est supra planum subjectum, inclinatior erit; illi verò circuli, quorum poli æqualiter distant à subjectis planis, æqualiter inclinantur.

Per L, P polos circulorum A B C D, B N D; perque M, Q polos circulorum E F G H, F O H ducantur maximi circuli A L C, E M C;
a 6. 1 *hujus.* [a] intersectiones A C, B D, M I concurrunt in sphæræ centro I. Et
b 19, & 3 *def.* 11. quoniam anguli A I D, N I D [b] recti sunt, (quippe cùm planum A N C [c] rectum sit planis A B C D, B H D), [d] erit ang A I N inclinatio plani B N D ad planum A B C D; paritérque ang E K O est inclinatio circuli F O H ad planum EFGH. Cùm igitur sit arc C P [e] ⊏ G Q, & arc P N = Q O, & proinde arc C N ⊏ G O, erit arc N A
c 15. 2 *huj.*
d 6 *def.* 11.
e *hyp.*
f 27. 3. [f] arc O E; quare ang A I N ⊐ ang E K O: *Q. E. D.*

Quòd si arc C P = G Q, simili discursu liquet angulos A I N, E K O æquari. *Q. E. D.*

Facilè convertitur hoc Theorema.

Schol. 1. *Theor.*

Fig. 55. Circuli maximi (A B, C B) tangentes eundem parallelum (A C), æqualiter inclinantur ad maximum parallelorum (D E); qui verò (G H) majorem parallelum I G tangit, inclinatior est ad parallelorum maximum (D E); & circuli (A B, C B) æqualiter inclinati ad parallelorum maximum (D E) tangunt eundem parallelum (A C). Qui verò (G H) inclinatior est ad maximum parallelum, majorem parallelum (I G) tangit.

1. Per F polum parallelorum, & contactus A, C describantur
a 5. 2 *hujus.* maximi circuli F A D, F C E; [a] transeunt hi per polos circulorum
b 15. 1 *huj.* A B, C B, [b] secántque adeò ipsos perpendiculariter: ergo F A est altitudo poli F supra circulum A B; & F C altitudo ejusdem supra circu-
c 5. *def.* 1 *huj.* & 28. 3. lum C B; quare cùm sit F A [c] = F C, liquet primum.

2. Per polum F, & contactum G describatur maximus circulus F G E; ergo (ut priùs) F G est altitudo poli F supra circulum G H:
d 21. 2 *huj.* atqui F G ⊏ F A: [d] unde liquet secundum.

3. Per F, & polos circulorum A B, C B describantur maximi circuli F A D, F C E; [b] hi secant illos perpendiculariter; ergo arcus F A, F C sunt elevationes poli F supra circulos A B, C B; [c] ergo arcus F A,
c *hyp.*
d 3. 2 *huj.* F C pares sunt. [d] itaque circulus intervallo F A, vel F C descriptus tanget circulos A B, C B: quod erat tertium.

4. Per F, & polum circuli G H describatur circulus maximus F G E.

F G E. ergo arcus F G est elevatio poli F supra circulum G H. Atqui arc F G [c] ⊏ arc F A. ergo circ [d] tangens, polo F per G descriptus major erit quàm A C. Quod erat ultimum.

Schol. 2. *Theor.*

Circuli maximi (A B, C D) ad parallelorum maximum (D B) æqualiter inclinati, polos (E, F) habent in circumferentiâ ejusdem paralleli. Et circuli maximi (A B, C D) qui polos (E, F) habent in circumferentia ejusdem paralleli (E F), ad parallelorum maximum (D B) æqualiter inclinantur. Fig. 56.

1. Descriptis per G polum parallelorum, & per E, F polos circulorum A B, C D circulis maximis G E, G F; quia hi [a] recti sunt illis, [b] erunt arcus G E. G F pares. [c] ergo circulus polo G per E, F descriptus parallelus est circulo D B. *Q. E. D.* [a] 15. 1 *hujus.* [b] *hyp.* [c] 2. 2 *hujus.*

2. Ob arc G E [d] = G F, [e] erunt circuli A B, C D æqualiter inclinati ad ipsum B D. *Q. E. D.* [d] 5. *def.* 1 *h.* 2. [e] *sch.* 21. *h.*

Schol. 3. *Theor.*

Si super circuli (A B D E) diametro A D constituatur rectum circuli segmentum (A F D), dividatur autem segmenti insistentis circumferentia (A F D) in duas inæquales partes (A F, F D); & à sectionis puncto (F) ad circumferentiam circuli primi plurimæ rectæ lineæ (F A, F I, F H, F B, F C, F D, F E) cadant; erit recta (F A) subtendens minorem partem (F A) insistentis segmenti omnium minima: quæ autem majorem (F D) subtendit, omnium maxima: reliquarum verò maximæ propinquior (F C) remotiore (F B) semper major est; duæ verò rectæ æquales (F E, F C) ab eodem puncto (D) in circumferentiam circuli (A B D E) à maxima (F D) æqualiter distantes. Fig. 57. 58.

Ducatur F G normalis plano A B D E, & connectantur G C, G B, G H, G I, G E; [a] liquet punctum G esse in recta A D; & ob F A [b] ⊐ F D, [c] erit G A ⊐ G D; [c] item G A ⊐ G I ⊐ G H &c. [c] & G D ⊏ G C ⊏ G B &c. [a] 38. 11. [b] *hyp.* [c] 7. *vel* 8. 3.

Ergo in triangulis rectangulis F G A, F G I, F G H, [d] erit F A ⊐ F I ⊐ F H; at in triangulis rectangulis F G D, F G C, F G B, [d] erit F D ⊏ F C ⊏ F B. Demum ob G E [b] = G C, [d] erit F E = F C. Quæ *E. D.* [d] 47. 1.

Schol. 4.

Schol. 4. Theor.

Fig. 59. Si in ſphæræ ſuperficie intra cujuſq; circuli peripheriam (ABCDE) ſignetur punctum (G) præter ejus polum (F); ab eo autem ad circuli circumferentiam plurimi arcus (G A, G B, G E, G C, G D) circulorum maximorum ducantur ſemicirculo minores; maximus eſt (G F A, qui per polum circuli ducitur; minimus autem, qui (G D) ei adjacet; reliquorum verò maximo propinquior (G B) remotiore (G C) ſemper major eſt; duo verò arcus (G E, G B) ab eodem maximo (G A) vel minimo (G D) æqualiter remoti inter ſe æquales ſunt.

a 15. 1 *hujus.* b 3. *ſch.* 21 *h.* Nam quoniam arcus A G D [a] perpendiculariter inſiſtit ſemicirculo A C D, [b] erit ſubtenſa G A major ſubtenſâ G B; [b] & G B ipſâ G C: ergo arcus G A major eſt arcu G B; & G B ipſo G C. & ſic in reliquis, juxta Scholium præcedens.

Schol. 5.

Fig. 60. Si in ſphæræ ſuperficie extra peripheriam cujuſq; circuli (ABCDE) ſignetur punctum (G) præter ejus polum (F); ab eo autem ad circuli circumferentiam plurimi arcus (G A, G G, G B, G E) ducantur ſemirculo minores, ſecantéſque circumferentiam circuli: maximus eſt qui (G F A) per circuli polum ducitur; reliquorum verò maximo propinquior (G B) remotiore ſemper major eſt: minimus autem eſt ille (G D) maximi, qui inter punctum (G) & circuli circumferentiam extra circulum interjicitur: reliquorum verò minimo propinquior (G H) remotiore (G I) ſemper minor eſt. Duo verò arcus (G B, G E, & G H, G K) ab eodem maximo vel minimo æqualiter remoti inter ſe æquales ſunt.

Itidem patet hoc ex Scholio penultimo, ex ſubtenſis ad arcus diſcurrendo.

Prop. XXII.

Fig. 61. Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) unum quidem circulum (A F) tangat, alium verò ei parallelum (G B H D) ſecet, poſitum inter ſphæræ centrum, & eum circulum quem tangit maximus circulus; polus autem (E) maximi circuli fuerit inter utrumque parallelorum (A F, G B H D), deſcribantúrque maximi circuli (G L, H K, M P, N K,

N K, O L) tangentes duorum parallelorum majorem (G B H D): hi omnes erunt inclinati ad maximum circulum (A B C D), & eorum rectissimus quidém erit ille (H K), cujus contactus erit in eo puncto (H), in quo majus segmentum (B H D) paralleli majoris bifariam dividitur; humillimus verò & maximè inclinatus (G L) cujus contactus erit in eo puncto (G), in quo minus segmentum (B G D) bifariam dividitur; reliquorum autem illi quidem (M P, N K) qui æqualiter distant ab alterutro eorum punctorum (H, G) in quibus segmenta bifariam secantur, sunt similiter inclinati; qui verò (O L) contactum remotiorem habet à puncto (H), in quo majus segmentum bisecatur, inclinatior perpetuò est eo (N K), qui contactum eidem puncto propiorem habet. Poli denique maximorum circulorum erunt in uno circulo, qui & minor erit eo circulo (A F) quem tangit maximus in principio circulus, & eidem parallelus erit.

Per I polum parallelorum, & E polum circuli A B C D, ducatur circulus; is [a] bisecat segmenta B G D, B H D, [b] transitque per contactum A: sit itaque circulus G A I E H C, fiat arcus H Q æqualis quadranti E A. ergo H Q ⊏ H I; atque Q cadit inter I, & A; itaque polo I per Q descriptus circulus Q T R, erit parallelus circulo A F, eóque minor. Per I, & puncta contactuum ducantur maximorum circulorum arcus M I S, N I T, O I V, qui [c] transibunt per polos tangentium: ac ob arcus I H, I M, I N, I O, I G [d] æquales; & arcus I Q, I S, I T, I V, I R [d] etiam pares; erunt toti arcus H Q, M S, N T, O V, G R æquales; ergo cùm H Q sit quadrans, erunt reliqui omnes etiam quadrantes; [e] ergo puncta Q, S, T, V, R erunt poli tangentium. *Q. E. D.*

Porro, quoniam arcus H M, H N [f] pares sunt, erunt istis [g] similes arcus R φ, R Ψ pares. ergo oppositi arcus Q T, Q S pares sunt (nam ductæ rectæ R Q, φ S Ψ T essent [h] diametri circuli Q T R) [k] ergo ducti arcus E T, E S pares erunt; & arcus E T ⊏ E V; & E Q maximus, ac E R minimus horum: [l] ergo circulus H K minimè inclinatur ad circulum A B C D, & G L maximè; & M P, N K æqualiter, & O L magis quàm N K. *Q. E. D.*

a 9. 2 *hujus.*
b 4. 2 *hujus.*
c 5. 2 *hujus.*
d 5 *def.* 2 *h.*
e 16. 1 *huj.*
f *hyp.*
g 10 *hujus.*
h 15. 1 *hujus.*
k 4. *sch.* 21. 2 *h.*
l 21. 2 *huj.*

Prop. XXIII.

Iisdem positis, si circumferentiæ (M O, N P) circulorum tangentium (M O, N P) à contactibus (M, N) ad nodos (O, P) sint æquales, prædicti circuli maximi (M O, N P) similiter inclinati erunt. Fig. 62.

Nam per E polum circuli A B C D, & I polum parallelorum ducatur circulus maximus G A C; & per I, ac contactus M, N describantur circuli maximi I M, I N: & quoniam hi [a] per polos tangentium M O, N P transeunt, [b] insistunt ipsis M O, N P diametricè & rectò; & inæqualiter secantur in I, & arc M O [c] = N P; [d] ergo ductæ rectæ I O, I P æquantur: ergo circulus O K P polo I per O descriptus transibit per P; sunt etiam arcus M O, M Q, & arcus S O, S Q [e] æquales; itidémque arcus N P, N R, & arcus T P, T R pares sunt; ergo (ob arc M O = N P) erunt toti O M Q, P N R pares; [f] ideóque subtensæ O Q, P R; & [g] propterea arcus O S Q, P T R, & horum dimidii S O, T P pares erunt. Item arcus K O, [h] æquantur; ergo reliqui arcus K S, K T, hisque [h] similes arcus H M, H N æquabuntur: [k] ergo circuli M O, N P similiter inclinantur ad circulum A B C D. *Q. E. D.*

[a] 5. 2 *huj.*
[b] 15. 1 *huj.*
[c] *hyp.*
[d] 12. 2 *h.*
[e] 9. 2 *huj.*
[f] 29. 3.
[g] 28. 3.
[h] 10. 2 *huj.*
[k] 22. 2 *hujus.*

LIB.

THEODOSII SPHÆRICORUM LIBER TERTIUS.

Prop. I.

SI circulum (A C B D) inæqualiter secet recta linea (A B); super qua constituatur rectum circuli segmentum (A F B), non majus semicirculo; dividatur autem insistentis segmenti circumferentia in duas partes inæquales (F A, F B); recta linea (F B) subtendens earum minorem, minima est linearum rectarum (F G, F H, F K, &c.) ductarum ab eodem puncto (F) ad majorem partem (A C H) circumferentiæ primi circuli: rectarum verò ductarum ab eo ipso puncto ad circumferentiam (B C) interceptam inter illam minimam rectam (F B) & diametrum (C D) in quam cadit perpendicularis (F L) deducta ab illo puncto (F), semper minimæ propior (F G) remotiore (F H) minor est. Omnium autem maxima est ea (F C) quæ ab illo eodem puncto ducitur ad extremitatem ejusdem diametri. Item recta (F A) subtendens majorem circumferentiam segmenti insistentis, minima est earum (F A, F I, F K, &c.) quæ cadunt in circumferentiam (A C) interceptam inter ipsam & diametrum (C D), sempérque huic propior (F I) remotiore (F K) minor est. Si verò recta linea (A B) subjectum circulum secans sit ejus diameter, & reliqua omnia eadem sint ut suprà; recta linea (F B) subtendens minorem partem circumferentiæ segmenti insistentis, minima est rectarum ductarum ab illo eodem puncto ad primi & subjecti circuli circumferentiam; ea verò (F A) quam majorem partem circumferentiæ segmenti insistentis subtendit, maxima est. Fig. 63.

Connectantur rectæ L G, L H, L I, L K. Et quoniam L B [a] = L G [a] = L H, erit (in triangulis rectangulis F L B, F L G, F D H) F B [b] = F G [b] = F H. Similiter, ob L A = L I = L K, erit F A = F I = F K. Et quoniam L C est [a] maxima omnium ab L ad circumferentiam A C B, [b] erit F C maxima omnium ab F ad eandem [a] 7. 3. [b] 47. 1.

Sin arcus A C B, A D B pares sint, patet res ex 3° Scholio 21æ secundi hujus.

Prop. II.

Fig. 65. Si recta linea (A B) secans circulum (A C B D) auferat segmentum (A C B) non minus semicirculo; super ipsâ verò recta linea (A B) statuatur aliud circuli segmentum A F B quod & semicirculo majus non sit, & inclinatum sit ad alterum segmentum (A D B), semicirculo non majus: dividatur autem insistentis segmenti circumferentia in partes inæquales (A F, F B): recta linea (F B) subtendens minorem circumferentiæ partem, minima est rectarum omnium (F B, F G, F H, &c.) ductarum ab illo puncto (F), à quo ipsa ducitur, ad subjecti circuli circumferentiam illam, quæ semicirculo minor non est: & reliqua omnia, quæ in præcedenti, sequuntur.

Ex casu vario perpendicularis F L varii casus emergunt.

Iterum demissâ rectâ F L ad planum A C B D rectâ F L, ductisq; rectis C E L D, L B, L G, L H, L A, L I, L K; liquet fore F B ⊐ F G ⊐ F H ⊐ F C; & F A ⊐ F I ⊐ F K ⊐ F C, ut præcedenti.

Prop. III.

Fig. 65. 66. Si in sphæra duo circuli maximi (A B C, D B E) se mutuò secent, ab eorum verò utroque sumantur æquales circumferentiæ (B A, B C; & B D, B E) utrinque à puncto (B), in quo se secant: rectæ lineæ (A D, C E), quæ extrema puncta circumferentiarum connectunt ad easdem partes, æquales sunt inter se.

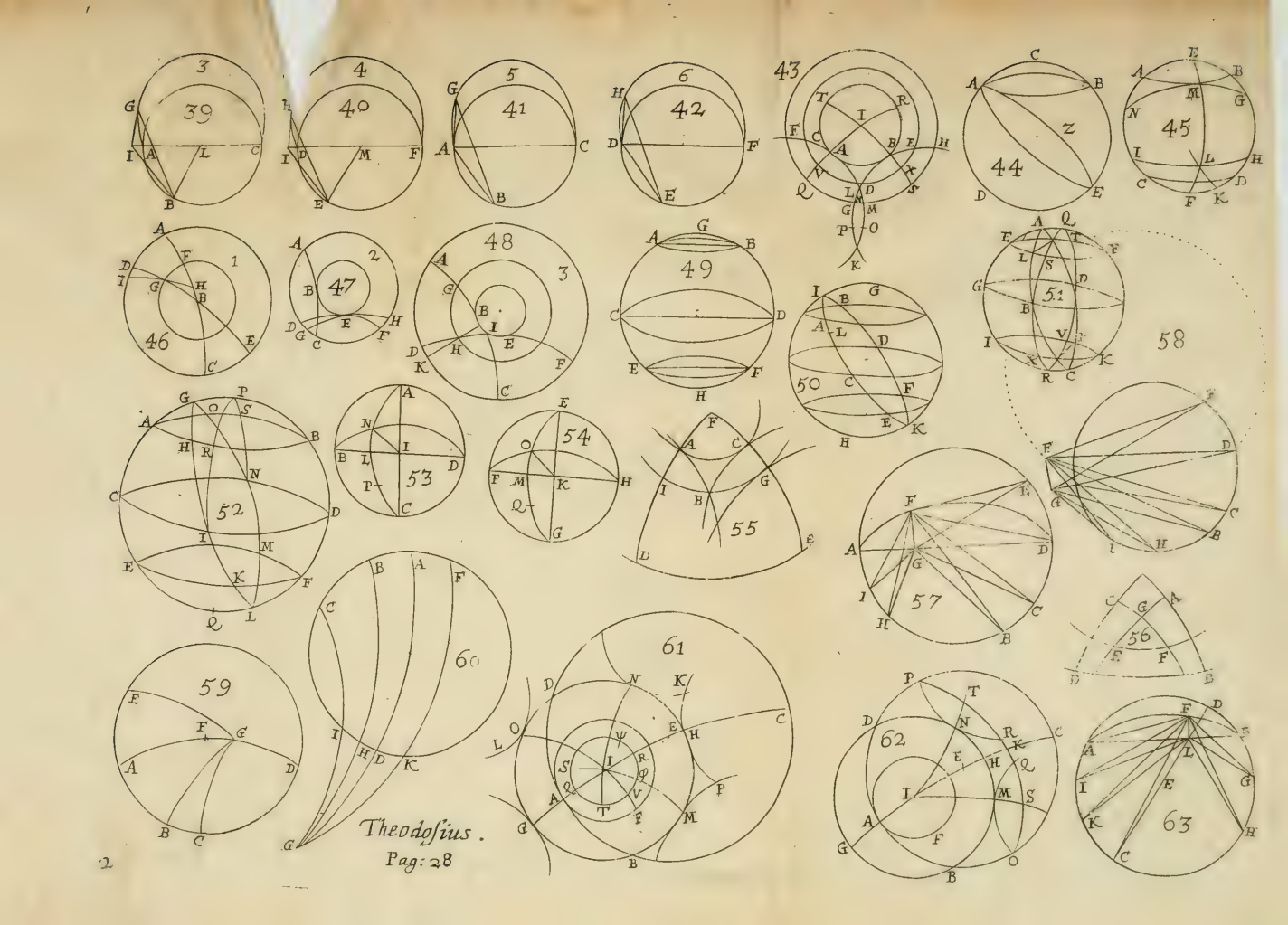
Sint primùm omnes B A, B C, B D, B E æquales; & polo B ducatur circulus A D C E; [a]ergo sectiones A C, D E sunt ejus diametri; & F centrum; & radii F A, F B, F D, F E pares. Item ang. E F C [b] = ang A F D. [c]ergo E C = A D.

a. 15. 1 *hujus.* b. 11. 1. c. 4. 1.

Sin omnes non æquentur, polo B per A, & C ducatur circulus A G C H, cui occurrat utrinque productus arcus D B E in G, & H. ergo B G = B H, item B D = B E. ergo D G = E H. Atqui etiam (sicut in priori parte) subtensæ G A, C H, adeóque arcus G A, C H æquantur; quare cum circuli segmentum G B H [a] rectum sit circulo A G C H; [a] & arcus G A H, G C H sint semicirculi; [c] liquet rectas A D, C E æquari.

d. 28. 3. e. 12. 2 *hujus.*

Prop.


3
39
4
40
5
41
6
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
Theodosius.
Pag: 28

Prop. IV.

Si in ſphæra duo maximi circuli (A B C, D B E) ſe mutuò ſecent, ab eorúmque altero (A B C) ſumantur æquales circumferentiæ (B A, B C) utrinque à puncto interſectionis (B); & per puncta (A, C) terminantia æquales circumferentias ducantur duo plana parallela (A F G, C H I), quorum alterum (A F G) conveniat cum communi ſectione (K B) ipſorum circulorum, extra ſphæram, versùs prædictum punctum (B): ſit verò una illarum æqualium circumferentiarum (B A, B C) major utralibet circumferentiarum (B F, B H) in altero maximo circulo (D B E) interceptarum inter prædictum punctum (B) & utrumque planorum parallelorum: ea circumferentia (B H) quæ eſt inter illud punctum (B) & planum (C H I) quod non convenit cum communi ſectione (K B) ipſorum circulorum, major eſt quàm ea ejuſdem circuli circumferentia (B F), quæ eſt inter idem punctum (B) & planum (A F G) quod convenit cum communi ſectione circulorum. Fig. 67.

Polo B per A, C ducatur circulus A D C E, habens A G, I C ſectiones cum parallelis planis A F C, I H C; & A C, D E ſectiones cum maximis circulis A B C, D B E; unde harum interſectio (K) [a] erit centrum circuli A D C E.

Jam, ob A G, C I [b] parallelas, [c] erit ang K A M = ang K C N: item ang A K M [d] = ang C K N. & K A = K C. [f] ergo K M = K N; [g] adeóque M D = N E. Porro K B (communis ſectio circulorum A B C, D B E) [h] recta eſt circulo A D C E; & propterea [k] ang L K M rectus eſt; [l] ergo ang L M K acutus eſt, & ei æqualis H N E; angulus autem D M F obtuſus. ergo arc E H ⊐ arc D F; & ideo reciprocè (cùm æquales ſint arcus B D, B E) arc B H ⊏ arc B F. *Q.E.D.*

[a] 15. 1 *huj.* [b] 16. 11. [c] 28. 1. [d] 15. 1. [e] 26. 1. [f] 3. *ax.* 1. [g] 19. 11. [h] 3. *def.* 11. [k] 17. 1.

Obſ: quòd arc E H ⊐ arc D F patet. Nam quia M D, N E æquantur, perpendiculares ab M, N auferent æquales arcus in circumferentia D B E; quorum alter minor eſt arcu D F, ob angulum D M F obtuſum, alter major arcu E H, ob angulum E N H acutum: ergo liquet arcum D F eſſe majorem arcu E H.

Prop. V.

Si in circumferentia maximi circuli (A B C D) ſit polus (A) parallelorum; húncque circulum maximum ſecent ad angulos rectos duo Fig. 68.

duo alii maximi circuli (B D, E C); quorum alter (B D) sit unus parallelorum, alter verò (E C) obliquus sit ad parallelos: ab hoc autem obliquo circulo (E C) sumantur æquales circumferentiæ (F G, G H) deinceps ad eandem partem maximi parallelorum, perque illa puncta (F, G, H) terminantia æquales circumferentias describantur paralleli circuli (I K, L M, N O): circumferentiæ (I L, L N) maximi illius circuli primò positi inter parallelos interceptæ, inæquales erunt; sempérque ea (I L) quæ propior fuit maximo parallelorum, remotiore (L N) major erit.

Per polum A, & punctum G ducatur maximus circulus A G P, liquet arcus G P, G F esse minores semicirculo (nam G P est minor quadrante A K, unde G F non secat G P inter G & P, & proinde G F
a 5 sch. 21. 2 b. etiam minor est semicirculo). Item G P transit per polos circuli I K, ergo arc G P ⊐ G F. Simili discursu arc G Q ⊐ arc G H. Item recta per G ad centrum sphæræ (hoc est communis sectio circulorum A P, E C) secat interjectum planum circuli I K intra sphæram; ergo eadem secabit planum paralleli N O extra sphæram. Ergo, juxta pra-
b 10. 2 hujus. cedentem arc G P major est arcu G Q; quare cùm sit arc I L [b] = G P; & arc L N [b] = G Q; erit arc I L major arcu L N. Q E D.

Prop. VI.

Fig. 69. Si in circumferentia maximi circuli (A B C D) sit polus (A) parallelorum, húncque maximum circulum ad angulos rectos secent duo alii circuli maximi (B D, E C), quorum alter (B D) sit unus parallelorum, alter verò (E C) sit obliquus ad parallelos: sumantur autem ab obliquo circulo (E C) æquales circumferentiæ (F G, G H) deinceps ad easdem partes maximi illius paralleli; & per puncta (F, G, H) terminantia æquales circumferentias, pérque polum (A) describantur maximi circuli (A I, A K, A L): hi circumferentias inæquales intercipient de maximo parallelorum, quorum propior (K L) maximo circulo primò posito (A B C D) semper erit major remotiore (K I).

a 5. 3 hujus. Per puncta F, G, H describantur paralleli M N, O P, Q R; [a] ergo
b 10. 2 hujus. arc O M ⊏ O Q; & [b] proinde arc G V ⊏ G X: fiat arc G Y = G X, & per Y describatur parallelus S T; cùm igitur arcus G Y,
c 3. 2 hujus. G X, & arcus G H, G F pares sint, [c] erunt ductæ rectæ H X, Y F
d 15. 1. hujus. æquales. Porro circulus S Z T [d] circulo A I rectò insistit, & bisecatur ab eo (ductâ ab Z ad alteram sectionem rectâ) & segmentum circuli A I ab Z per I ad alteram sectionem majus est semicirculo; &

arcus

arcus Y Z eſt quadrante minor, (nam quia circulus A B C D rectus eſt circulis B D, E C, tranſibit per eorum polos, & [c] biſecabit eorum ſegmenta; unde arcus B φ, E φ erunt quadrantes; quare K I quadrante minor eſt; & proinde ipſi [f] ſimilis Y Z quadrante minor eſt). [g] ergo recta Y Z eſt minima cadentium in circumferentiam Z I; adeóque minor ipſâ Y F, [h] hoc eſt ipſâ H X. ergo cùm circulus Q R minor ſit circulo S T, erit arcus H X major quàm ut ſit ſimilis arcui Y Z. (Major enim ſubtenſa ex minore circulo majorem proportione arcum aufert, quàm minor ex majore,) ergo arcus L K ([f] ſimilis arcui H X) major eſt, quàm ut ſimilis ſit arcui K I (qui ſimilis eſt arcui Y Z). quare cùm arcus L K, K I ſint in eodem circulo, erit ſimpliciter arc L K major arcu K I. *Q. E. D.*

c 9. 2 *hujus.*
f 10. 2 *hujus.*
g 1 *hujus.*
h *priùs.*

Prop. VII.

Si in ſphæra maximus circulus (A B C D) tangat aliquem ſphæræ circulum (A E); alius autem maximus circulus (G H) ad parallelos obliquus ſit, tangátque circulos majores illis, quos tangit maximus circulus primò poſitus; fuerintque eorum contactus (G, H) in maximo circulo primò poſito; & ſumantur à circulo obliquo circumferentiæ (I K, K L) æquales, & continuæ ad eaſdem partes maximi (B D) parallelorum: per puncta autem (I, K, H) terminantia æquales circumferentias deſcribantur paralleli circuli (M N, O P, Q R); hi circumferentias inæquales (M O, O Q) intercipient de maximo circulo (A B C D) primò poſito; quarum ea (M O) quæ propior erit maximo parallelorum, erit major remotiore (O Q). Fig. 70.

Per S polum parallelorum, & punctum K deſcribatur circulus maximus S K, ſecans parallelos punctis T, V: item per K [a] deſcribatur circulus maximus K E tangens parallelum A E in E verſùs partes G (unde K E cadit inter S V, & G I; nam ſi extra G I caderet, non tangeret circulum A E, quoniam ipſi K G non priùs occurrit quàm in puncto quod opponitur puncto K). ergo cùm arcus S V tranſeat polum circuli M N, [b] erit K V minimus arcus omnium à K ad M N cadentium, & K Y minor quàm K I; paritérque K X ⊐ K L; ergo (ut in 5tâ hujus) erit arcus K Y major arcu K X; ſed arcus M O [c] æquatur arcui K Y, [d] & arcus O Q arcui K X; ergo arcus M O major eſt arcu O Q. *Q. E. D.*

a 15. 2 *h.*
b 5 *ſch.* 21. 2 *h.*
c 13. 2 *huj.*

Prop.

Prop. VIII.

Fig 71. Si in ſphæra maximus circulus (A B) tangat aliquem ſphæræ circulum (A C;) aliquis autem alius maximus circulus (D E) obliquus ad parallelos tangat circulos majores illis, quos tangebat maximus circulus primò poſitus; fueríque eorum contactus in maximo circulo primò poſito: ſumantur autem de obliquo circulo æquales circumferentiæ continuæ (F G, G H) ad eaſdem partes maximi parallelorum, pérque puncta (F, G, H) terminantia æquales circumferentias deſcribantur maximi circuli (M N, K L, C I), qui & tangant eundem circulum (A C) quem tangebat maximus circulus primò poſitus, & ſimiles parallelorum circumferentias intercipiant; habeántque eos ſemicirculos, qui tendunt à punctis contactuum (C, K, M) ad puncta (F, G, H) terminantia æquales obliqui circuli circumferentias, per quæ deſcribuntur, ejuſmodi ut minimè conveniant cum illo circuli maximi primò poſiti ſemicirculo, in quo eſt contactus (A) obliqui circuli inter apparentem polum, & maximum parallelorum. Inæquales intercipient circumferentias (I L, L N) de maximo parallelorum (B D), quorum propior (I L) circulo maximo (A B) primò poſito, ſemper erit major remotiore (L N).

Per puncta F, G, H deſcribantur paralleli P F, Q G, R H ſecantes circulum K L in O, S; [a] ergo arc Q P ⊏ Q R, & [b] ideo arc G O ⊏ G S; fiat arc G T = G S, & per T deſcribatur parallelus V T ſecans circulum M N in X: Jam circulus M N ſecans parallelum V X non per polos aufert ſegmentum, ab X per V ad alteram ſectionem, minus ſemicirculo; etiam, ſegmentum circuli M N ab X per N ad oppoſitam ſectionem eſt majus ſemicirculo. Item ſegmentum V X inclinatur ad M X versùs partes R. (Nam circulus B E [c] rectus eſt circulo N Y per polum incidenti parallelorum; ergo B E inclinatur ad circulum M N, ergo V X ad eundem N M inclinatur); denique ſegmentum paralleli X V, ab X per V ad alteram ſectionem, *ſecatur inæqualiter in T: è quibus recta T X [d] minor eſt rectâ T F, [e] hoc eſt rectâ H S; unde, ſicut in 6tâ hujus, erit arcus I L major arcu L N. Q. E. D.

a 7. 3 *hujus.*
b 13. 2 *hujus.*
c 15 1 *huj.*
* *Vid. Not.*
d 2. 3 *hujus.*
e 3. 3 *hujus.*

Fig. 72. *Not.* Quòd ſegmentum ab X per V ad alteram ſectionem protenſum, ſecetur inæqualiter in T, ita patebit. Ducatur circulus maximus E Z tangens parallelum A C in Z; & quoniam circulus maximus Z Y [f] tranſit per polos circulorum E Z, & B E, [g] biſecabit is horum ſe-

f 2 2 *hujus, & conſt.*
g 9 2 *huj.*

segmenta; ergo arcus E Z est quadrans; paríque de causa arcus E D est quadrans; ergo circulus polo E per Z descriptus transit per Y, & D.

Simili discursu N M est quadrans, & circulus maximus polo N per M descriptus transibit per Y, [f] pérque polos tangentis N M; [g] ergo circulus M Y bisecabit segmenta tangentis N M, & circulorum E B, X Y; ergo secabit circulum E B ad intervallum quadrantis ex N; hoc est ultra quadrantem ex E, hoc est extra circulum D B. ergo segmentum ab X per V ad alteram sectionem bisecatur extra V; & arcus X V minor est semisse istius segmenti, magísque arcus T X est minor ejusdem semisse.

Lemma Probl.

Propositis duabus inæqualibus magnitudinibus (A B, A C,) reperire aliam mediam, quæ datæ cuicunque magnitudini (D G) commensurabilis sit. Fig. 73.

Bisecetur D G, & ejus semissis bisecetur, ac ita continuò [a] donec aliqua pars D F sit minor quàm C B; & sit E multiplex ipsius D F proximè major quàm A C; ergo E ⊐ A B: (nam si æqualis esset, posset detrahi una magnitudo æqualis ipsi D F, sic ut supereresset multiplex ipsius D F major quàm A C, contra constructionem), atqui E & D G commensurabiles sunt, [b] propter D F communem mensuram; ergo liquet propositum. a 1. 10. b *constr.*

Prop. IX.

Si polus (A) parallelorum sit in circumferentia maximi circuli (A B), quem duo alii maximi circuli B C, D C ad rectos angulos secent; quorum circulorum alter (B C) sit unus parallelorum, alter verò (D C) ad parallelos obliquus sit: hoc obliquo circulo sumantur æquales circumferentiæ (E F, G H) quæ continuæ quidem non sint, sed tamen sint ad easdem partes maximi illius paralleli: per polum autem (A) & singula puncta (E, F, G, H) æquales circumferentias terminantia describantur maximi circuli (A E I, A F K, A G L, A H M): inæquales intercipient circumferentias; quarum ea (M L) quæ propior erit maximo circulo primùm posito, semper erit major remotiore (K I.) Fig. 74.

Sit primùm arcus intermedius F G commensurabilis arcui E F, vel G H; & [a] dividantur arcus E F, F G, G H in partes æquales communi mensuræ: pérque divisionum puncta Q, P, N, & polum A ducantur circuli maximi A Q V, A P T, A N R; ergo arc M R [b] ⊏ a 4. 10. b *6. 3. huj.*

R L [b]⊏ L S, & sic continuò; ergo arc M L ⊏ K I. *Q. E. D.*

Fig. 75. Sit secundò arc F G incommensurabilis utrique arcui E F, F G; tum si arcus M L non sit major arcu K I; sit primò minor, & sumatur K N æqualis ipsi M L; & ducatur circulus maximus A N secans circulum

[c] *lem.* 8.3.*b.* C D in O; tum [c] capiatur arcus F P major quàm F O, & minor quàm F E, ipsique F G commensurabilis; & huic æqualis sit G Q, ducantúrque maximi circuli A P R, A Q S. Hinc ob arcus P F, G Q æquales, & commensurabiles intermedio F G, erit (ut modò ostensum est) arc S L ⊏ arc K R ⊏ arc K N. Ergo arc M L ⊏ arc K N:

[d] *suppos.* atqui arc M L [d] = arc K N, quæ repugnant.

Fig. 76. Quòd si dicatur arcus M L æqualis arcui K I, bisecentur arcus E F, G H in N, O; ducantúrque maximi circuli A N P, A O Q; [e] ergo

[e] 6. 3 *huj.* arc M Q ⊏ arc Q L; [e] & arc K P ⊏ P I; unde Q L ⊐ $\frac{1}{2}$ M L ($\frac{1}{2}$ K I); & K P ⊏ $\frac{1}{2}$ K I. quare arc Q L ⊐ K P. atqui, cùm arc G O = F N, non erit Q L ⊐ Q P, ut modò ostensum est; ergo malè ponitur arc M L æqualis arcui K I.

Igitur arcus M L non est minor arcu K I, nec æqualis ei; ergo major. *Q. E. D.*

Scholium.

Planè simili discursu, quæ de arcubus continuis ostensa sunt in propositionibus 5, 7, 8, etiam de non-continuis ostendi possent. Valeant igitur.

Prop. X.

Fig. 77. Si polus (A) parallelorum sit in circumferentia maximi circuli (A B), quem duo alii maximi circuli (B D, C D) ad angulos rectos secent, quorum alter (B D) sit unus parallelorum, alter verò (C D) sit obliquus ad parallelos: in hoc autem obliquo circulo (C D) sumantur duo quælibet puncta (E, F) ad easdem partes maximi illius paralleli; pérque polum (A) parallelorum, & per utrumque illorum punctorum describantur maximi circuli (A G, A H): erit ut circumferentia (B H) maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum primò positum, & proximum maximum circulum per polum & per unum punctorum descriptum, ad circumferentiam (C F) obliqui circuli inter eosdem circulos interceptam; ita circumferentia (H G) maximi parallelorum intercepta inter duos maximos circulos per polum pérque utrumque punctorum descriptos ad circumferentiam aliquam, quæ sit minor, quàm circumferentia (F E) obliqui circuli inter utrumque punctum intercepta.

Sint

Sint primùm arcus C F, F E commensurabiles, & dividantur in arcus æquales communi mensuræ, perque puncta divisionum & polum A ducantur circuli maximi I M, K N, L O.

Quum igitur arcus C L, L K, K F, F I, I E æquentur; sitque ideò arc B O ⌐ O N ⌐ N H, & sic porro: [b] erit arc B O. C L ⌐ O N. L K ⌐ N H. K F. [c] ergo compositè arc B O + O N + N H ad arc C L + L K + K F. ⌐ arc N H. K F; hoc est arc B H. C F ⌐ arc N H. K F [b] ⌐ H M. F I, verùm arc H M. F I ⌐ H G. F E ([c] ob H M. F I ⌐ M G. I E) ergo arc B H. C F ⌐ arc H G. F E. Sit arc B H. C F :: H G. P. quare H G. P ⌐ H G. F E. [d] ergo P ⊐ arc. F E. *Q.E.D.*

a 6. 3 *hujus.*
b 8. 5.
c 34. 5.
d 10. 5.

Quod si arcus C F, F E sint incommensurabiles: sit primò B H. C F :: H G. F I. & arcus F I major (si fieri potest) arcu F E: tum inter F I. F E medius arcus F K [e] sit ipsi C F commensurabilis; ac per polum A & K ducatur maximus circulus K L; ergo è mox ostensis, est B H. C F (hoc est H G. F I) ⌐ H L. F K. [f] ⌐ H G. F K. [g] ergo F I ⊐ F K. *Q.E.A.*

Fig. 78.
e *lem.* 8. 3 *huj.*
f 8. 5.
g 10. 5.

Sin dicatur arc B H. C F :: H G. F E; bisecetur arcus F E in X, perque polum A & X ducatur circulus maximus X Y; [h] ergo arc H Y ⌐ Y G; adeóque H Y ⌐ ½ H G. [k] ergo H Y. F X ⌐ ½ H G. F X (½ F E) :: H G. F E. ergo H Y. F X ⌐ B H. C F; [l] unde H Y ad arcum majorem arcu F X se habebit ut B H ad C F; quod fieri non posse modò demonstratum est.

Fig. 79.
h 6. 3 *hujus.*
k 8. 5.
l 10. 5.

Igitur potiùs ut B H ad C F, ita erit H G ad arcum minorem ipso F E. *Q. E. D.*

Coroll. arc. B H. C F ⌐ H G. F E. & permutatim.

Prop. XI.

Si polus (A) parallelorum sit in circumferentia maximi circuli (A B), quem duo alii maximi circuli (B C, D E) ad angulos rectos secent; quorum alter (B C) sit unus parallelorum, alter verò (D E) sit obliquus ad parallelos, alius autem maximus circulus (A E) per polos parallelorum transiens obliquum circulum secet (in E) inter maximum parallelorum, & eum (D F) quem obliquus circulus (D E) tangit: diameter sphæræ (D L) ad diametrum (D M) ejus circuli, quem tangit obliquus circulus, majorem rationem habet, quàm circumferentia (B C) maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum primò positum, & maximum circulum per polos paralle-

Fig. 80.

lorum transeuntem, ad circumferentiam (D E) obliqui circuli inter eosdem circulos interceptam.

Sint A G, B G, D L, D M communes sectiones circuli A B cum circulis A C, B C, D E, D F; item C G, F N communes sectiones circuli A E cum circulis B C, D F. Ex polo A per E describatur parallelus O E; sintque O H, E H, E I communes ejus sectiones cum circulis A B, A C, D E. Quoniam igitur A G [a] recta est plano paralleli O E, cadítque in ejus centrum, erit ang G H I rectus; [b] ergo I G ⊏ I H: Fiat I K = I H, & connectatur E K; ergo (cùm circulus uterque D E, O E rectus sit circulo A B, ac [c] ideò communis ipsorum sectio E I recta plano A B; ideóque anguli E I H, E I K recti sint, & latera E I, I H æquentur lateribus E I, I K) [d] erunt anguli I H E, I K E æquales. Jam D L. D M [e] :: D G. D N :: I G. I H [g] :: I G. I K* ⊏ ang I K E ([h] hoc est ang. I H E, [k] vel B G C). I G E. Est verò ang B G C. ang I G E (vel D G E) [l] :: arc B C. D E. ergo D L. D M ⊏ arc B C. D E. *Q. E. D.*

a 10. 1 *huj.*
b 19. 1.
c 19. 11.
d 4. 1.
e 15. 5.
f 4. 6.
g 7. 5.
* *Vid. Not. h prius.*
k 10. 11.
l 33. 6.

Fig. 81.

Not. Quòd I G. I K ⊏ ang I K E. I G E, sic patet.

Ducatur G X ad K E parallela, cui occurrat I E protracta in X. centróque G per E ducatur arcus circuli Z E Y, ipsis G I (protractæ) & G X occurrens punctis Z. Y. Estque X E. E I [m] :: triang X G E. triang E G I [n] ⊏ sector Y G E. triang E G I [n] ⊏ sector Y G E. Sector E G Z [o] :: ang X G E. ang E G I. [p] ergo componendo X I. E I ⊏ ang X G I. ang E G I. [q] hoc est G I. K I ⊏ ang E K I. ang. E G I. *Q. E. D.*

m 1. 6.
n 8. 5.
o 33. 6.
p 28. 5.
q 4. 6.

Scholium.

Iisdem positis, diameter sphæræ ad diametrum paralleli (G E) per punctum (E) obliqui circuli, per quod maximus circulus (A C) è polo transit, descripti, minorem rationem habet, quam circumferentia (B C) maximi parallelorum intercepta inter maximum circulum primò positum, & maximum circulum per polos parallelorum transeuntem, ad circumferentiam (D E) obliqui circuli inter eosdem circulos interceptam.

Nam quoniam uterque circulus B C, D E transit [a] per polos circuli A B, erit istorum intersectio Q polus circuli A B; ergo segmentum D E L (rectò insistens circulo A B) dividitur inæqualiter in E; [b] ergo ducta recta E D minor est ductâ E O; ergo (cùm circulus E O minor sit circulo E D) erit arcus E O major arcu E D; [c] ergo arc B C. E O ⊐ B C. E D; ergo tota periph. heria circuli B C ad totam periph. circuli E O (hoc est diameter B R ad diametrum O D) minorem rationem habet quàm B C ad E D. *Q. E. D.* *Prop.*

a 13. 1 *huj.*
b 3 *sch.* 21. 2 *h.*
c 8. 5.

Prop. XII.

Si in ſphæra maximi circuli (A B, C D) tangant unum eundémque parallelorum (A C) intercipiántque ſimiles parallelorum circumferentias (P K, B D) inter utrumque maximorum circulorum interjectas; alius autem maximus circulus (E F) ad parallelos obliquus circulos tangat majores (B G) iſtis, quos tangunt maximi circuli primò poſiti; ſecétque obliquus idem circulus eoſdem maximos circulos primò poſitos in punctis (I, K) poſitis inter maximum parallelorum, & circulum quem tangunt circuli maximi primò poſiti: diameter ſphæræ ad diametrum circuli (E G), quem tangit obliquus circulus, majorem rationem habet, quàm circumferentia (B D) maximi paralleli (H F) intercepta inter circulos (A B, C D) primò poſitos, eundémque circulum tangentes, ad circumferentiam (I K) obliqui circuli inter eoſdem circulos interceptam. Fig. 82.

Per L polum parallelorum & puncta E, I, K deſcribantur maximi circuli L H, L M, L N; & per K parallelus K O ſecans A B in P: quum igitur [a]ſit ratio diametri ſphæræ ad diametrum circuli E G major quàm ratio arcûs H M ad E I, [b] & hæc major ratione arcûs M N ad I K; ſitque arcus B D minor arcu M N (nam arcus P K, [c]ſimilis arcui B D, minor eſt arcu O K, [d] qui ſimilis eſt arcui M N); [e] erit ratio diametri ſphæræ ad diametrum circuli E G major ratione arcûs B D ad arcum I K. *Q. E. D.*

[a] 11. 3 *hujus.* [b] *cor.* 10. 3. *h.* [c] *hyp.* [d] 10. 2 *hujus.* [e] 8. 5.

Prop. XIII.

Si in ſphæra paralleli circuli (C D, E F) intercipiant circumferentias (G C, G F) maximi alicujus circuli (A F) utrinque æquales ab illo puncto (G) in quo ipſe maximus circulus (A F) ſecat maximum parallelorum (B G); per puncta verò (C, F) terminantia æquales circumferentias, & per parallelorum polos deſcribantur maximi circuli; aut ſi deſcribantur maximi circuli, qui unum eundémque parallelorum tangant, æquales intercipient circumferentias (G H, G I) de maximo parallelorum. Fig. 83. 84.

Ob arcus G C, G F pares, [a]erunt paralleli C D, E F pares. [b] ergo arcus G K, G L æquantur; [c]ergo ductæ ſubtenſæ C K, F L æquales erunt; [d] unde arcus C K, F L æquantur; ergo, quum arcus G H [e]ſimilis ſit arcui C K, [e] & arcus G I arcui F L, erunt arcus G H, G I ſimiles, & proinde æquales. *Q. E. D.* *Coroll.* 2. *huj.*

[a] 17. 2 *huj.* [b] 18. 2 *huj.* [c] 3. 3 *huj.* [d] 28. 3. [e] 10. *vel* 13. 2. *huj.*

Coroll. Hinc arcus C H, H E, & similiter intercepti æquales sunt. Nam rectæ C H, H E æquantur.

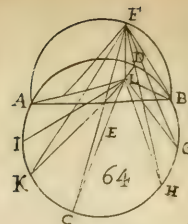
Prop. XIV.

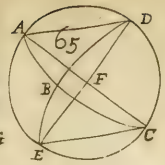
Si in sphæra maximus circulus (A B) aliquem circulum (A C) tangat; alius autem maximus circulus (D E) obliquus ad parallelos tangat circulos (D F) majores illis, quos tangebat maximus circulus (A B) primò positus; inæquales intercipient circumferentias (K H, E I) parallelorum circulorum, quorum propiores (K H, vel B E) utrivis polorum majores erunt, quàm ut similes sint remotioribus (E I, vel G K).

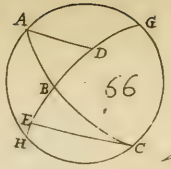
Per puncta E, K [a] describantur maximi circuli L E, C K tangentes circulum A C in C, & L: [b] ergo arcus M H, E I similes sunt; quare K H major est, quàm ut similis sit arcui E I; paritérque similes sunt arcus B N, G K, ergo B E (propior alteri polo) major est quàm ut similis sit arcui G K. unde liquet propositum.

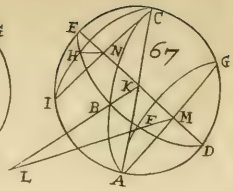
a 15. 2 *huj.*
b 13. 2 *huj.*

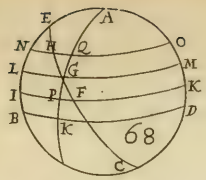
FINIS.

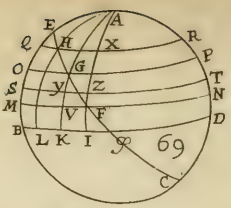

64

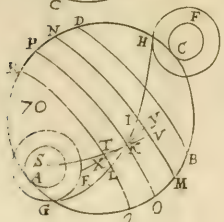

65

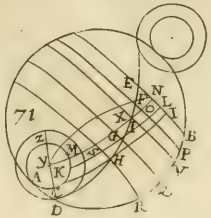

66

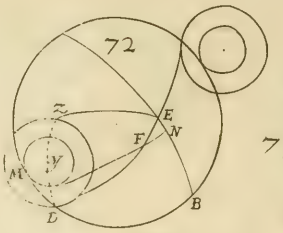

67

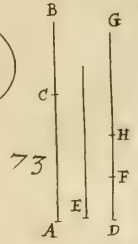

68

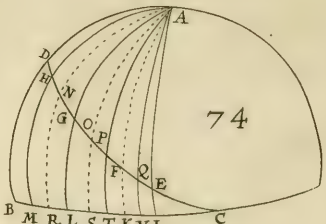

69

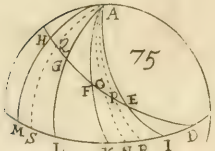

70

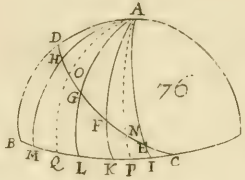

71

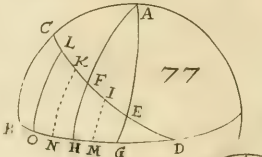

72

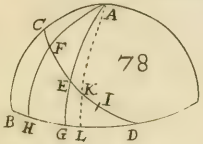

73

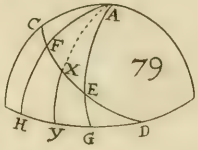

74

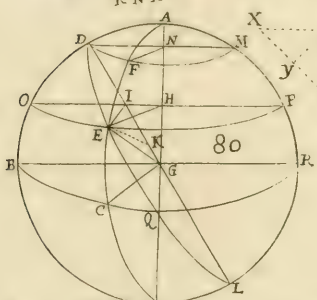

75

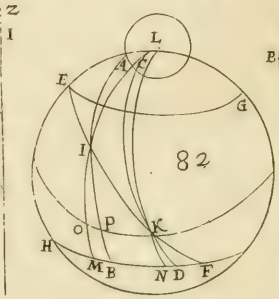

76

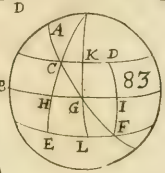

77

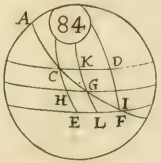

78

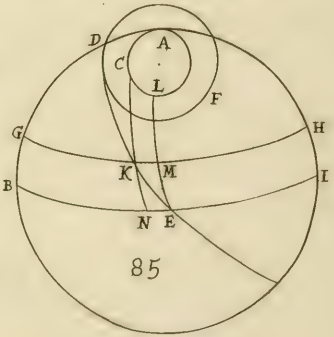

79


80


82


83


84


85